Math. U.
62mb

Math. 11. 62 mb Francoeur

F

<36611077380015

<36611077380015

Bayer. Staatsbibliothek

Vollständiger Lehrkurs

der

reinen Mathematik

von

L. B. Francoeur,
Professor der Mathematik an der Universität zu Paris, Mitgliede der philomatischen Gesellschaft, Ritter der Ehrenlegion u. s. w.

Nach der vierten verbesserten und vermehrten Original-Ausgabe (1837) aus dem Französischen übersetzt, mit Anmerkungen und Zusätzen versehen

von

Dr. **Edmund Külp,**
Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Gewerbschule in Darmstadt.

Zweiten Bandes zweites Buch,

enthaltend

die analytische Geometrie im Raume.

Mit einer Kupfertafel.

Bern, Chur und Leipzig,
Verlag und Eigenthum von J. F. J. Dalp.
1842.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Haller'sche Buchdruckerei in Bern.

Inhalt.

Zweiten Bandes zweites Buch.

(Die analytische Geometrie im Raume.)

Erstes Kapitel.

Die sphärische Trigonometrie.

	Seite.
Grundbegriffe und Fundamentalformeln	1
Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke	10
Auflösung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke	15
Aufgaben, welche zwei Auflösungen zulassen	24

Zweites Kapitel.

Von den Flächen und Linien im Raume.

Allgemeine Sätze	35
Gleichungen der Ebene, der cylindrischen, conischen und Rotations-Flächen	41
Aufgaben über die Ebene und gerade Linie	53
Transformation der Coordinaten	67
Polarcoordinaten	71
Von den ebenen Durchschnitten	72

Seite.

Drittes Kapitel.

Von den Flächen der zweiten Ordnung.

Vom Mittelpunkt und den Diametralebenen der Flächen und von der Reduction der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades auf ihre einfachere Form 75
Von den Flächen, welche einen Mittelpunkt haben 81
Von den Flächen, welche keinen Mittelpunkt haben 86
Von den parallelen Schnitten in einer und derselben Fläche zweiten Grades überhaupt, und der Art die Fläche zu construiren . . . 90
Von den Kreisschnitten in den Flächen des zweiten Grades 94
Discussion der numerischen Gleichungen des zweiten Grades mit drei Veränderlichen 98
Von den Berührungsebenen an den Flächen des zweiten Grades . . 109
Von den schiefen conjugirten Diametralebenen 116

Viertes Kapitel.

Von einigen andern Flächen.

Flächen höherer Grade 123
Transcendente Flächen 127
Noten 129

Erstes Kapitel.

Sphärische Trigonometrie.

Grundbegriffe und Fundamentalformeln derselben.

§. 1. Drei durch den Mittelpunkt einer Kugel gelegte Ebenen MON, NOP, MOP (Fig. 1) erzeugen eine **dreikantige Ecke** O, und schneiden die Kugelfläche in größten Kreisen, deren Bogen CA, CB, AB ein **sphärisches Dreieck** ABC bilden. Die zwischen den Kanten enthaltenen Winkel jener dreikantigen Ecke O werden bezüglich durch die Seiten oder Bogen dieses sphärischen Dreiecks gemessen, nämlich NOP durch AB, MON durch AC, MOP durch BC. Die Winkel des Dreiecks dagegen werden, wie überhaupt die der Curven, durch diejenigen Winkel bestimmt, welche die an jene Kreisbogen durch den Schnittpunkt derselben gezogenen Tangenten miteinander machen; so z. B. versteht man unter dem sphärischen Winkel A den geradlinigen Winkel, welchen die durch den Durchschnittspunkt A der Bogen AC, AB gelegten Tangenten AT, AS einschließen. Da aber diese Tangenten senkrecht auf dem Halbmesser AO stehen, in welchem die den Bogen AC, AB, entsprechenden größten Kreise sich schneiden; so ist der sphärische Winkel A nichts anders, als der Flächenwinkel PNOM, den die beiden Ebenen PON und NOM miteinander bilden. Die dreikantige Ecke O und das sphärische Dreieck ABC sind demnach immer dergestalt miteinander verbunden, daß die Kantenwinkel der Ecke

durch die Seiten des Dreiecks gemessen werden, während die Flächenwinkel jener Ecke den Winkeln dieses Dreiecks correspondiren.

Die Probleme, in welchen verlangt wird, aus einigen gegebenen Stücken eines sphärischen Dreiecks die übrigen durch Rechnung zu finden, sind hiernach mit denjenigen genau übereinstimmend, wo es sich darum handelt, aus mehreren Stücken einer dreikantigen Ecke die andern zu berechnen. Nun gibt es im Ganzen sechs Stücke im sphärischen Dreiecke, nämlich drei Winkel A, B, C, und drei, denselben respectiv gegenüberliegende Seiten a, b, c, oder, wenn man will, in der dazu gehörigen dreikantigen Ecke, drei Kantenwinkel a, b, c, und drei denselben gegenüberstehende Flächenwinkel A, B, C. Wir haben es also in der sphärischen Trigonometrie mit der vollständigen Auflösung folgender Aufgabe zu thun: Wenn drei von jenen sechs Stücken bekannt sind, die drei andern daraus herzuleiten.

Dieses vorausgeschickt, denke man sich jetzt aus einem Punkte O nach drei im Raum liegenden Punkten M, N, P, wie z. B. drei Sternen, gerade Linien gezogen; dieselben werden die Kanten einer dreikantigen Ecke O abgeben, deren Bestimmungsstücke denen eines sphärischen Dreiecks ABC correspondiren. Das gedachte Dreieck wird durch die Bogen dreier größten Kreise zusammengesetzt, welche die Punkte verbinden, wo jene Linien die Oberfläche der mit einem willkührlichen Radius beschriebenen Kugel treffen, deren Centrnm in unserm Punkte O liegt.

Anmerkung. Legt man den größten Kreis DEF senkrecht auf AO, so wird auch der Flächenwinkel der beiden Ebenen CAO und BAO durch den Winkel DOE oder durch den Bogen DE gemessen: der sphärische Winkel hat daher auch zu seinem Maß den Bogen des größten Kreises DE, der zwischen seinen bis zu Quadranten verlängerten Schenkeln enthalten ist; denn es ist offenbar Bogen AE und Bogen DA$=90^0$.

§. 2. Aus dem Vorhergehenden lassen sich leicht nachstehende Sätze entnehmen:

1. Da jeder geradlinige Winkel einer dreikantigen Ecke weniger als zwei Rechte beträgt, so ist jede Seite eines sphärischen Dreiecks kleiner als die halbe Peripherie eines größten Kreises. Auch macht jeder Winkel des Dreiecks weniger als zwei Rechte aus. Wir haben

es daher hier nur mit solchen Dreiecken zu thun, in welchen sowohl die Seiten als Winkel einzeln kleiner als 180^0 sind. Ueberdem ließe sich die Construction eines Dreiecks, wo dieses nicht der Fall wäre, auf die Construction eines Dreiecks zurückführen, worin jene Eigenschaft stattfindet.

2. Weil in jeder vielkantigen Ecke die Summe der geradlinigen Winkel weniger als vier Rechte macht, so ist die Summe der drei Seiten eines sphärischen Dreiecks immer kleiner als der Umfang eines größten Kreises. Die dreikantige Ecke des Würfels, welche aus drei rechten Winkeln besteht, zeigt, daß jede Seite eines sphärischen Dreiecks dem Quadranten gleich sein kann; sie darf denselben auch übersteigen.

3. Sphärische Dreiecke, welche auf der nämlichen Kugel, oder auf Kugeln von gleichem Halbmesser liegen, sind einander gleich, wenn sie 1) die drei Seiten, 2) die drei Winkel, 3) zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, 4) eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln wechselsweise gleich haben.

Der Beweis für diese Sätze, sowie der für die beiden folgenden, wird auf ähnliche Weise wie für die geradlinigen Dreiecke geführt.

4. Im gleichschenkligen sphärischen Dreiecke halbirt der aus dem Scheitel auf die Basis senkrecht gezogene Bogen diese Basis und den Scheitelwinkel. Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt.

5. In jedem sphärischen Dreiecke steht dem größeren Winkel die größere Seite, und umgekehrt der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber.

6. Im sphärischen Dreiecke ist eine Seite immer kleiner als die Summe der beiden andern und größer als die Differenz derselben. Da bei der dreikantigen Ecke zwei geradlinige Winkel jederzeit größer sind als der dritte, mithin dies auch von ihren Bogenmaßen gelten muß: so hat man $a<b+c$ und $b<a+c$, oder $a>b-c$.

Die halbe Summe der drei Seiten eines sphärischen Dreiecks übersteigt also stets eine beliebige Seite desselben: denn setzt man $a+i$ statt $b+c$, so verwandelt sich $a+b+c$ in $2a+i$, d. h. der halbe Umfang des Dreiecks $=a+\frac{1}{2}i$ ist größer als die Seite a.

7. Schneiden wir unsere dreikantige Ecke O durch drei respectiv auf ihren Kanten senkrecht stehende Ebenen, so bilden diese Ebenen eine

zweite dreikantige Ecke O′ (Fig. 2), deren Kantenwinkel beziehungsweise die Supplemente der Flächenwinkel der ersten Ecke sind; und umgekehrt, die Kantenwinkel der erstern sind bezüglich die Supplemente der Flächenwinkel der zweiten (siehe Note 15 in den Elementen der Geometrie). Die beiden erwähnten Supplementarecken O und O′ bestimmen mithin zwei sphärische Dreiecke ABC, A′B′C′, wovon die Winkel und Seiten des einen respectiv die Supplemente der Seiten und Winkeln des andern sind. Bezeichnen wir daher beim ersten Dreiecke die Seiten durch a, b, c, und die Winkel durch A, B, C, beim zweiten hingegen die Seiten durch a′, b′, c′, und die Winkel durch A′, B′, C′; so finden zwischen den Elementen dieser Dreiecke folgende Relationen statt:

$$a' = 180^0 - A,\; b' = 180^0 - B,\; c' = 180^0 - C \;\ldots\; (1).$$
$$A' = 180^0 - a,\; B' = 180^0 - b,\; C' = 180^0 - c \;\ldots\; (2).$$

Jener Wechselbeziehung wegen, welche zwischen den Winkeln und Seiten beider Dreiecke nachgewiesen worden, heißt jedes derselben das Supplementar- oder Polardreieck des andern.

8. In jedem sphärischen Dreiecke ist die Summe der drei Winkel stets größer als zwei und kleiner als sechs Rechte. Man hat in der That $A+B+C<6$ Rechte, weil jeder Winkel des Dreiecks kleiner als zwei Rechte ist. Ferner entsteht durch Addition der 3 Gleichungen (1)

$$A+B+C = 6 \text{ Rechte} - (a'+b'+c');$$

nun ist aber nach §. 1. $a'+b'+c'<4$ Rechte, folglich $A+B+C>$ 2 Rechte.

Die Gleichungen (1) und (2) sind von großem Nutzen, indem sie uns gestatten, die sechs Hauptprobleme der sphärischen Trigonometrie auf 3 zu reduciren: jene Aufgabe besteht nämlich darin, aus so vielen Stücken als zur Bestimmung eines sphärischen Dreiecks erforderlich sind, die übrigen durch Rechnung zu finden. Nehmen wir z. B. an, es wäre bekannt wie man aus den Seiten a, b, c die drei Winkel A, B, C finden könne; so läßt sich auch umgekehrt aus den drei bekannten Winkeln A, B, C eine Seite a herleiten, insofern man statt des vorgelegten Dreiecks sein Polardreieck A′B′C′ betrachtet, dessen drei Seiten a′, b′, c′ mittelst der Gleichungen (1) bestimmt sind. Hat man einmal den Winkel A′ dieses Dreiecks

gefunden, so gibt die Gleichung $a=180^0-A'$ die dem Winkel A gegenüberliegende Seite a. Es ist demnach hinreichend zu wissen, wie ein sphärisches Dreieck, dessen drei Seiten bekannt sind, aufgelöst werde, um gleichzeitig auch ein Dreieck auflösen zu können, von dem man die drei Winkel kennt. Aehnliches gilt auch von den andern Fällen, was sich bald noch deutlicher herausstellen wird.

Anmerkungen. 1. Ein auf der Kugeloberfläche befindlicher Punkt, der von den Punkten eines auf dieser Kugel gezogenen Kreises überall gleichweit entfernt ist, heißt der Pol dieses Kreises.

2. Die Endpunkte A und G (Fig. 1) des auf einer größten Kreisebene FDE senkrecht errichteten Kugeldurchmessers AG sind die Pole sowohl dieses größten Kreises, als auch aller kleinern Kreise, die diesem parallel laufen. Die die beiden Pole eines Kreises verbindende Gerade AG wird auch die Achse desselben genannt. Steht ein Punkt A von zwei Punkten D und E eines größten Kreises, die jedoch nicht die Endpunkte eines und desselben Kreisdurchmessers sein dürfen, von jedem um 90^0 ab; so ist er der Pol dieses Kreises.

3. Stehen zwei größte Kreise aufeinander senkrecht, so geht der eine Kreis durch die Pole des andern; und umgekehrt, geht ein größter Kreis durch die Pole des andern, so sind beide zu einander senkrecht.

4. Beschreibt man aus den Scheiteln A, B, C (Fig. 3) eines sphärischen Dreiecks, von dem jede Seite kleiner als ein Quadrant sein mag, als Pole größte Kreisbogen; so entsteht ein neues sphärisches Dreieck A′ B′ C′, in welchem die Scheitel A′, B′, C′ bezüglich die Pole der Seiten des erstern Dreiecks sind. Da Am und An Quadranten sind, so ist A der Pol von B′C′ oder a′. Eben so ist B der Pol von b′ und C der von c′. Da jetzt B der Pol von b′, und C der von c′ ist, so sind A′C und A′B Quadranten; folglich A′ der Pol von a. Eben so ist B′ der Pol von b, und C′ der Pol von c. Dieser Eigenschaft wegen wird jedes dieser Dreiecke das Polardreieck des andern genannt. Jedes sphärische Dreieck, wie auch seine Seiten beschaffen sein mögen, hat übrigens sein

correspondirendes Polardreieck, was sich auf ähnliche Weise nachweisen läßt. Daß Polardreieck und Supplementardreieck auf eins hinausgehen, ist eine unmittelbare Folge des vorhin Gesagten.

§. 3. Legt man durch den Punkt m einer Kante OA der dreikantigen Ecke O (Fig. 4), für welchen Om=1 ist, eine Ebene senkrecht auf diese Kante; so erhält man

$$mn=\tan c,\quad On=\sec c,\quad mp=\tan b,\quad Op=\sec b.$$

Die gradlinigen Dreiecke mnp, npO geben

$$np^2=mn^2+pm^2-2mn\cdot pm\cdot\cos A,$$
$$np^2=nO^2+pO^2-2nO\cdot pO\cdot\cos a.$$

Zieht man diese Gleichungen, Glied für Glied von einander ab, und berücksichtigt dabei, daß die Dreiecke mnO und pmO rechtwinklig sind, und Om=1 ist; so entsteht

$$o=1+1-2\sec c\sec b\cos a+2\tan c\tan b\cos A.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, wenn man $\frac{1}{\cos}$ für sec und $\frac{\sin}{\cos}$ für tang setzt,

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$

eine Formel, welche die zwischen der einen Seite, den beiden andern und dem von den letztern eingeschlossenen Winkel stattfindende Relation ausdrückt. Wenn man mit jeder der beiden andern Kanten auf gleiche Weise verfährt, so wird man zwei der vorhergehenden ähnliche Gleichungen erhalten, und somit folgendes System von Gleichungen bilden können:

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,\\ \cos b&=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B,\\ \cos c&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.\end{aligned}\right\}\ldots(3)$$

Aus demselben zieht man folgende drei Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},\\ \cos B&=\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\sin a\sin c},\\ \cos C&=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b},\end{aligned}\right\}\ldots(4)$$

welche die Winkel vermittelst der Seiten zu finden lehren.

Die Formeln (3) enthalten die ganze sphärische Trigonometrie, weil sie zur Berechnung von dreien der sechs Stücke A, B, C, a, b, c hinreichen, wenn die drei andern gegeben sind. Es lassen sich übrigens für jeden besondern Fall bequemere Formeln angeben, welche wir nun aus obigen Fundamentalgleichungen durch verschiedene Combinationen herleiten wollen.

§. 4. I. Man substituire den Werth von $\cos A$ aus (4) in die Gleichung $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$; hierdurch ergibt sich

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\right)^2,$$

oder, wenn man den zweiten Theil auf einerlei Nenner bringt und $1 - \cos^2$ statt $\sin^2$ setzt,

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

Indem man auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszieht und beide Theile durch $\sin a$ dividirt, wird der zweite Theil offenbar eine symmetrische Function von a, b, c. Bezeichnet man dieselbe durch M, so ergibt sich $\frac{\sin A}{\sin a} = M$. Ebenso findet man

$$\frac{\sin B}{\sin b} = M, \quad \frac{\sin C}{\sin c} = M; \text{ folglich}$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \; \ldots \; (5),$$

d. h. in jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus der Winkel wie die Sinus der gegenüberliegenden Seiten.

II. Man substituire in die erste der Gleichungen (3) für $\cos b$ seinen Werth aus der zweiten und $\frac{\sin B \sin a}{\sin A}$ statt $\sin b$; alsdann ergibt sich

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \sin a \sin c \cos c \cos B + \frac{\sin a \sin c \sin B \cos A}{\sin A}.$$

Hieraus entsteht, wenn man die beiden ersten Glieder des zweiten Theils auf die andere Seite bringt, und das Ganze mit $\sin a \sin c \sin B$ dividirt, die erste der folgenden Formeln, indem sich die andern durch einfache Verwechslung der Buchstaben ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
\cot A &= \frac{\cos a \sin c - \cos B \sin a \cos c}{\sin a \sin B}, \\
\cot A &= \frac{\cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b}{\sin a \sin C}, \\
\cot B &= \frac{\cos b \sin a - \cos C \sin b \cos a}{\sin b \sin C}, \\
\cot B &= \frac{\cos b \sin c - \cos A \sin b \cos c}{\sin b \sin A}, \\
\cot C &= \frac{\cos c \sin a - \cos B \sin c \cos a}{\sin c \sin B}, \\
\cot C &= \frac{\cos c \sin b - \cos A \sin c \cos b}{\sin c \sin A},
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

vermittelst welcher man zwei Winkel des Dreiecks berechnen kann, wenn der dritte und die ihn einschließenden Seiten bekannt sind.

III. Wendet man auf das Polardreieck den durch die Gleichungen (3) ausgedrückten Lehrsatz an, d. h. vertauscht man a mit $180^0 - A$, A mit $180^0 - a$, u. s. w.; so erhält man folgende Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\
\cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\
\cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Dieselben lehren einen Winkel aus den beiden andern und der zwischen ihnen liegenden Seite finden.

Aus dem vorhergehenden System von Gleichungen erhalten wir nachfolgendes:

$$\left.\begin{aligned}
\cos a &= \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}, \\
\cos b &= \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}, \\
\cos c &= \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Man kann daher aus den drei Winkeln eines sphärischen Dreiecks die Seiten desselben berechnen.

Wendet man das oben auf die Gleichungen (3) angewandte Verfahren nun auf die Gleichungen (6) an, wobei die Cotangenten und

Cosinus das entgegengesetzte Zeichen bekommen; so findet man folgende sechs Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
\cot a &= \frac{\cos A \sin C + \cos b \sin A \cos C}{\sin b \sin A}, \\
\cot a &= \frac{\cos A \sin B + \cos c \sin A \cos B}{\sin c \sin A}, \\
\cot b &= \frac{\cos B \sin C + \cos a \sin B \cos C}{\sin a \sin B}, \\
\cot b &= \frac{\cos B \sin A + \cos c \sin B \cos A}{\sin c \sin B}, \\
\cot c &= \frac{\cos C \sin A + \cos b \sin C \cos A}{\sin b \sin C}, \\
\cot c &= \frac{\cos C \sin B + \cos a \sin C \cos B}{\sin a \sin C}.
\end{aligned}\right\} (9)$$

Diese Formeln dienen, zwei Seiten eines Dreiecks zu berechnen, wenn man die dritte nebst den anliegenden Winkeln kennt.

IV. Außer den obenstehenden Gleichungen finden zuweilen noch folgende ihre Anwendung:

$$\left.\begin{aligned}
\sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\
\sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A, \\
\sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B, \\
\sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B, \\
\sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C, \\
\sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C.
\end{aligned}\right\} (10)$$

Setzt man nämlich für $\cos a$ seinen Werth aus der ersten der Gleichungen (3) in die beiden folgenden, so erhält man

$$\cos b = \cos b \cos^2 c + \sin b \sin c \cos c \cos A + \sin a \sin c \cos B,$$

$$\cos c = \cos c \cos^2 b + \sin b \sin c \cos b \cos A + \sin a \sin b \cos C.$$

Aus diesen findet man, wenn man $1-\sin^2$ für $\cos^2$ schreibt, die erste Gleichung durch $\sin c$ und die zweite durch $\sin b$ dividirt, die zwei ersten der Gleichungen (10).

Auf ähnliche Weise werden auch die vier folgenden Gleichungen gefunden, wenn man in den Gleichungen (3) einmal $\cos b$ und ein andermal $\cos c$ eliminirt.

Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke.

§. 5. Bezeichnen wir den rechten Winkel des sphärischen Dreiecks durch A, die diesem Winkel gegenüberstehende Seite durch a, welche, wie bei den geradlinigen rechtwinkligen Dreiecken, die Hypothenuse genannt wird (Fig. 5); so geben die Gleichungen (3, 5, 6, 7, 9, 8), wenn wir daselbst $A=90^0$ setzen.

$$\cos a = \cos b \cos c \quad \ldots \quad (m)$$
$$\sin b = \sin a \sin B \quad \ldots \quad (n)$$
$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B \quad \ldots \quad (p)$$
$$\cos a = \cot B \cot C \quad \ldots \quad (q)$$
$$\cot B = \cot b \sin c \quad \ldots \quad (r)$$
$$\cos B = \sin C \cos b \quad \ldots \quad (s)$$

Diese für den Gebrauch der Logarithmen geeigneten sechs Gleichungen sind zur Auflösung jedes sphärischen rechtwinkligen Dreiecks hinreichend. Mit ihrer Hülfe lassen sich immer drei von den fünf Größen a, b, c, B und C berechnen, wenn die zwei andern gegeben sind: es gilt nur darum, für jede besondere Aufgabe eine ihren bekannten Stücken entsprechende Gleichung zu wählen, so daß sie bloß eine einzige Unbekannte enthält. Man nimmt zu diesem Behuf diejenige von diesen sechs Gleichungen, in welcher die drei fraglichen Stücke vorkommen, wobei sich jedoch öfters ereignen kann, daß man nöthig hat, die Buchstaben B und C ihre Stelle in der Figur vertauschen zu lassen, wodurch auch b mit c wechselt.

Die wesentlich verschiedenen sich hier darbietenden Fälle sind folgende:

I. Fall. Gegeben die Hypothenuse und ein schiefer Winkel B.

Die drei Unbekannten C, b und c bestimmt mittelst der Gleichungen . . . . (q), (n), (p).

II. Fall. Gegeben die Hypothenuse u. eine Seite b.

Die drei Unbekannten c, B und C bestimmt mittelst der Gleichungen . . . . (m), (n), (p).

III. Fall. Gegeben die beiden Seiten b und c.

Die drei Unbekannten a, B und C bestimmt mittelst der Gleichungen . . . . (m) und (r).

IV. Fall. Gegeben eine Seite b mit ihrem anliegenden Winkel C.

Die drei Unbekannten a, c und B bestimmt durch die Gleichungen . . . . (p), (r) u. (s).

V. Fall. Gegeben die zwei schiefen Winkel B und C.

Die drei Unbekannten a, c und b bestimmt durch die Gleichungen . . . . (q) und (s).

Der häufige Gebrauch, welchen man von den oben aufgestellten sechs Gleichungen macht, erheischt, daß man dieselben immer ins Gedächtniß zurückzuführen vermöge, was jedoch wegen Mangel an Symmetrie einige Schwierigkeit hat. Um ein empirisches Mittel zur Wiederauffindung jener Formeln anzugeben, wollen wir irgend eins von den fünf Stücken a, b c, B, C (indem der rechte Winkel A hier nicht in Betracht kommt) Mittelstück, die beiden in der Figur rechts und links demselben zunächst befindlichen Stücke anliegende, und die beiden andern gegenüberliegende Stücke nennen. Dies vorausgesetzt, ergeben sich nun folgende Regeln:

I. Der Cosinus eines Mittelstücks ist gleich dem Product aus dem Sinus der gegenüberliegenden Stücke.

II Der Cosinus eines Mittelstücks ist gleich dem Producte aus den Cotangenten der anliegenden Stücke.

In der That lassen sich unsere obigen sechs Gleichungen mit Hülfe dieser beiden Sätze erhalten, wobei jedoch zu erinnern ist, daß, bei jeder Anwendung, man statt der beiden Katheten die Complemente derselben zu nehmen hat.

§. 6. Aus unsern sechs Gleichungen lassen sich nachstehende Folgerungen herleiten.

1. Die Gleichung (m) lehrt, daß der Cosinus der Hypothenuse gleich dem Producte aus den Cosinus der beiden Katheten ist. Die Hypothenuse ist also immer kleiner oder größer als ein Quadrant, je nachdem die beiden Katheten gleichartig oder ungleichartig sind. Wir verstehen hier unter gleichartigen Bogen solche, welche zu gleicher Zeit kleiner oder größer als 90^0 sind, und unter ungleichartigen Bogen solche, von denen der eine kleiner, der andere größer als 90^0 ist.

2. Aus der Gleichung (q), welcher gemäß der Cosinus der Hypothenuse gleich dem Producte aus den Cotangenten der beiden schiefen Winkel ist, geht hervor, daß die Hypothenuse kleiner oder größer als ein Quadrant ist, je nachdem die beiden schiefen Winkel von einerlei oder von verschiedener Art sind.

3. Die Gleichungen (r und s) zeigen, daß die Katheten mit den gegenüberstehenden Winkeln immer von einerlei Art sind.

4. Die Gleichung (p) lehrt, daß die Hypothenuse und eine Kathete gleichartig, wenn der von ihnen eingeschlossene Winkel kleiner als 90^0 ist, hingegen ungleichartig sind, wenn dieser Winkel mehr als 90^0 beträgt.

5. Ist die Kathete b gleich dem Quadranten, mithin $\cos b = 0$; so ist $\cos a = 0$, $\cos B = 0$, d. h. die Seiten CA und CB betragen gleichfalls jede einen Quadranten, und stehen beide auf der dritten Seite AB senkrecht: das Dreieck hat alsdann zwei rechte Winkel, ist gleichschenklig und C ist der Pol des Bogens AB.

Anmerkungen. 1. Die Gleichung (m) ist mit der Relation $a^2 = b^2 + c^2$ für das rechtwinklige ebene Dreieck, dessen Seiten a, b, c sind, analog: in der That läßt sich die erstere Gleichung auf die zweite zurückführen, wenn man die Cosinus in Reihen entwickelt und hierauf den Halbmesser unendlich groß setzt.

Die Gleichung (n), derzufolge der Sinus eines Winkels gleich dem Sinus der Gegenseite dividirt durch den Sinus der Hypothenuse ist, ist mit dem aus der ebenen Trigonometrie bekannten Satze $\sin B = \frac{b}{a}$ analog.

Die Gleichung (p) drückt aus, daß der Cosinus eines Winkels gleich der Tangente der anliegenden Seiten, dividirt durch die Tangente der Hypothenuse ist; ein Satz, welcher mit der Relation $\cos B = \frac{c}{a}$ für ebene Dreiecke analog ist.

Die Gleichung (r) oder ihre gleichgeltende $\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}$, nach welcher die Tangente eines Winkels gleich der Tangente der Gegenseite dividirt durch den Sinus der anliegenden Seite ist, ist der Relation $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$ für rechtwinklige ebene Dreieck analog.

2. Zur Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke können auch jene sphärischen Dreiecke gerechnet werden, bei denen zwar kein Winkel ein rechter, dagegen eine Seite ein Quadrant ist. Denn hat man z. B. $a = 90^0$, in welchem Falle das Dreieck

ein Quadranten-Dreieck heißt, so wird der Winkel A′ des zugehörigen Polardreiecks ein rechter sein. Man kann also dieses rechtwinklige Polardreieck nach unsern obigen Regeln auflösen und von diesem dann auf das primitive Dreieck zurückgehen.

§. 7. Obgleich durch unsere obenstehende Gleichungen sich alle rechtwinklige sphärische Dreiecke auflösen lassen, so ist doch zu bemerken, daß sie die Werthe der Unbekannten nicht mehr mit der erforderlichen Genauigkeit angeben, wenn die Bogen sehr klein und durch Cosinus ausgedrückt sind, oder dieselben nahe an 90° liegen und ihre Sinus vorkommen. Wie man in den betreffenden Fällen dann verfährt, soll in Folgendem gezeigt werden.

1. Wird die Hypothenuse a vermittelst B und C gesucht, so verwandelt sich, wenn man erwägt, daß $\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$, die Formel

$$(q) \text{ in } \mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 - \cot B \cot C}{1 + \cot B \cot C} = \frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C}{\sin B \sin C + \cos B \cos C} =$$

$$- \frac{\cos (B + C)}{\cos (B - C)} \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Summe der beiden Winkel B und C größer als 90° ist, weil der zweite negative Theil positiv werden muß.

2. Um eine Seite b durch die bekannten Winkel B und C zu bestimmen, gibt uns die Gleichung (s) $\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}$. Setzt man z $= 90° - B$, woraus $\cos B = \sin z$ und $\cos b = \frac{\sin z}{\sin C}$; so erhält man

$$\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} b = \frac{\sin C - \sin z}{\sin C + \sin z} = \frac{\mathrm{tg} \frac{1}{2}(C - z)}{\mathrm{tg} \frac{1}{2}(C + z)},$$

$$\mathrm{tg} \tfrac{1}{2} b = \sqrt{(\mathrm{tg}[\tfrac{1}{2}(B - C) + 45^0] \cdot \mathrm{tg}[\tfrac{1}{2}(B + C) - 45^0])}.$$

3. Will man einen Winkel B aus der Hypothenuse und der anliegenden Kathete c berechnen, so liefert die Gleichung (p)

$$\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{1 - \mathrm{tg}\, c \cot a}{1 + \mathrm{tg}\, c \cot a} = \frac{\cos c \sin a - \sin c \cos a}{\cos c \sin a + \sin c \cos a} : \text{woraus}$$

$$\mathrm{tg} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\left(\frac{\sin (a - c)}{\sin (a + c)}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Man sieht hieraus, daß, um nichts Imaginäres zu bekommen, die Sinus von $a-c$ und $a+c$ einerlei Zeichen haben müssen. Ist daher $a+c>180^0$, so muß die Hypothenuse $<c$ sein. Die Hypothenuse ist demnach in einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke alsdann nicht die größte Seite, wenn es stumpfe Winkel hat.

4. Die Gleichung (m) gibt $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$, woraus

$$tg^2 \tfrac{1}{2} c = tg \tfrac{1}{2}(a+b) \cdot tg \tfrac{1}{2}(a-b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

5. Sucht man endlich eine Seite b vermittelst des gegenüberstehenden Winkels B und der Hypothenuse a, so setzt man, insofern b nahe an 90^0 liegt, anstatt die Gleichung (n) unmittelbar anzuwenden, $b = 90^0 - 2z$, und $\sin a \sin B = tg\, x$. Dadurch verwandelt sich die Gleichung (n) in $\cos^2 z = tg\, x$, woraus

$$tg^2 z = \frac{1 - tg\, x}{1 + tg\, x} = tg(45^0 - x);\ \text{folglich}$$

$$tg(45^0 - \tfrac{1}{2} b) = \sqrt{[tg(45^0 - x)]} \ldots (14).$$

Diese Gleichung liefert uns b, nachdem vorerst der Bogen x vermittelst der Formel $tg\, x = \sin a \sin B$ berechnet worden.

Wir geben hier unter die fünf einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke angehörigen Stücke an, damit man sich in der Anwendung der obenstehenden Formeln üben könne, indem man aus zwei nach Belieben als gegeben betrachteten Stücken die drei andern berechnet.

Rechtwinkliges Versuchsdreieck.

Stücke.	Log. Sinus.	Log. Cosinus.	Log. Tang.
$a = 71^0\ 24'\ 30''$	0,9767235—1	0,5035475—1+	0,4731759 +
$b = 140 \cdot 52 \cdot 40$	0,8000134—1	0,8897507—1—	0,9102626—1—
$c = 114 \cdot 15 \cdot 54$	0,9598303—1	0,6137969—1—	0,3460333 —
$B = 138 \cdot 15 \cdot 45$	0,8232909—1	0,8728568—1—	0,9504341—1—
$C = 105 \cdot 52 \cdot 39$	0,9831068—1	0,4370867—1 —	0,5460201—

Das mehreren dieser Logarithmen angehängte negative Zeichen soll andeuten, daß der darauf Bezug habende Faktor negativ ist; ist daher mit dem auf der linken Seite der Logarithmen stehenden

negativen Zeichen, wie es bei einer Division vorkommt, keineswegs zu verwechseln. Je nachdem die Anzahl der negativen Faktoren in einer Formel gerade oder ungerade ist, erhält das Produkt das Zeichen + oder —, ein Umstand, auf den man gehörig Acht geben muß; denn z. B. tg. a gibt für a einen Bogen, der weniger als 90^0 beträgt, wenn diese Tangente positiv ist, während man das Supplement davon für die negative Tangente zu nehmen hat.

Auflösung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke.

§. 8. Die verschiedenen Fälle, welche sich hier darbieten können, wollen wir einzeln vornehmen.

I. Fall. Die drei Seiten a, b, c, sind gegeben, den Winkel A zu finden. Die erste der Gleichungen (3) verwandelt sich, wenn man $1-2\sin^2\frac{1}{2}A$ statt $\cos A$ setzt, in

$$\cos a = \cos(b-c) - 2\sin b \sin c \sin^2\tfrac{1}{2}A \quad \ldots (15),$$

unter welcher Form sie häufig angewendet wird.

Man leitet daraus her

$$2\sin b \sin c \sin^2\tfrac{1}{2}A = \cos(b-c) - \cos a,$$ oder auch

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\ \sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c}.$$

Diese für die logarithmische Rechnung geeignete Formel lehrt uns den Winkel A kennen. Sie erhält dadurch, daß man $2p = a+b+c$ setzt, die symmetrische Form:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c} \quad \ldots (16).$$

Substituirt man $2\cos^2\frac{1}{2}A - 1$ für $\cos A$ in die erste der Gleichungen (3), so bekommt man

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c} \quad \ldots (17)$$

Durch Division der beiden letzten Gleichungen entsteht

$$tg^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)} \quad \ldots (18).$$

Diese Ausdrücke für $\cos\frac{1}{2}A$ und $tg\frac{1}{2}A$ können zu demselben Zwecke, wie $\sin\frac{1}{2}A$, gebraucht werden.

Anmerkung. Da $\sin^2\frac{1}{2}A$ nothwendigerweise positiv ist, desgleichen $\sin b$ und $\sin c$ positiv sind (vorausgesetzt, daß b und c weniger als 180^0 betragen); so erhellet aus dem Werthe von $\sin^2\frac{1}{2}A$, daß gleichzeitig $c<b+a$ und $c>b-a$ sein müsse; indem die entgegengesetzten Relationen in offenbarem Widerspruche stehen.

II. Fall. Die drei Winkel A, B, C sind gegeben, die Seite a zu finden. Wendet man die vorhergehenden Gleichungen auf das Ergänzungsdreieck an und setzt $2P=A+B+C$, so erhält man nachstehende Formeln:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a=-\frac{\cos P\cos(P-A)}{\sin B\sin C}, \ldots\ldots \quad (19)$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a=\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B\sin C}, \ldots \quad (20)$$

$$tg^2\tfrac{1}{2}a=-\frac{\cos P\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)} \ldots \quad (21)$$

Anmerkung. Die Formel (19), in deren Zähler das Minuszeichen vorkommt, wird nicht imaginär: denn die Summe 2P der drei Winkel ist stets zwischen 6 und 2 Rechten enthalten, mithin $P>90^0$ und $<3\times90^0$; der erste Cosinus ist also negativ, wird aber wegen des ihm voranstehenden Minuszeichens wieder positiv. Was den zweiten Cosinus anbelangt, so ist derselbe jederzeit positiv; denn da in dem Ergänzungsdreiecke jede Seite kleiner als die Summe der beiden andern Seiten ist, so hat man $180^0-B+180^0-C>180^0-A$, woraus folgt $90^0>P-A$.

III. Fall. Es sind zwei Seiten b und c nebst dem eingeschlossenen Winkel A gegeben, die dritte Seite a zu finden. Es läßt sich zu diesem Behufe die Fundamentalgleichung (3) unter folgender Form $\cos a=\cos b\cos c\,(1+tg\,b\,tg\,c\cos A)$ gebrauchen. Man kann jene Fundamentalgleichung für die logarithmische Rechnung einrichten, indem man setzt:

$\cos A=2\cos^2\frac{1}{2}A-1$, $\cos a=1-2\sin^2\frac{1}{2}a$. Hieraus entsteht

$$1-2\sin^2\tfrac{1}{2}a=\cos(b+c)+2\sin b\sin c\cos^2\tfrac{1}{2}A,$$

$$=1-2\sin^2\tfrac{1}{2}(b+c)+2\sin b\sin c\cos^2\tfrac{1}{2}A,$$

Berechnet man den Hülfswinkel v aus der Gleichung

$$\sin v = \cos\tfrac{1}{2}A\sqrt{(\sin b \sin c)},$$ so hat man

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a = \sin^2\tfrac{1}{2}(b+c) - \sin^2 v = \sin\tfrac{1}{2}(b+c+2v)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-2v).$$

Anmerkung. Den Winkel C kann man unmittelbar erhalten, wenn man von der letzten der Formeln (6) ausgeht, welche gibt:

$$\cot C = \frac{\cot c \sin b - \cos b \cos A}{\sin A} = \cot A\left(\frac{\cot c \sin b}{\cos A} - \cos b\right).$$

Setzt man dann $\frac{\cot c}{\cos A} = \cot\varphi$, so kommt

$$\cot C = \frac{\cot A}{\sin\varphi}\sin(b-\varphi).$$

Den Winkel B findet man auf eine ganz ähnliche Art. Auch kann der gewählte Hülfswinkel φ zur logarithmischen Berechnung der dritten Seite a dienen. Denn die Fundamentalformel gibt

$$\cos a = \cos c\,(\cos b + \sin b \operatorname{tg} c \cos A),$$

welche durch Substitution unsers Hülfswinkels φ in

$$\cos a = \frac{\cos c \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}$$ übergeht.

IV. Fall. Die zwei Winkel C und B nebst der anliegenden Seite a sind gegeben, den dritten Winkel A zu finden. Die Gleichung (7) gibt

$$\cos A = \cos B \cos C\,(\operatorname{tang} B \operatorname{tang} C \cos a - 1).$$

Aus der im vorhergehenden Fall vorkommenden Gleichung für $\sin^2\frac{1}{2}a$ erhält man, indem man zu dem Ergänzungsdreiecke seine Zuflucht nimmt:

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \sin^2\tfrac{1}{2}(B+C) - \sin B \sin C \sin^2\tfrac{1}{2}a,$$ woraus

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \sin\tfrac{1}{2}(B+C+2v)\sin\tfrac{1}{2}(B+C-2v),$$

wenn der Hülfswinkel v aus der Gleichung

$$\sin v = \sin\tfrac{1}{2}a\sqrt{(\sin B \sin C)}$$ berechnet wird.

Anmerkung. Der Winkel A läßt sich auf folgende Art ebenfalls leicht finden. Man hat nämlich

$$\cos A = -\cos C \cos B + \sin C \sin B \cos a$$

$$= \cos C\,(-\cos B + \sin B \operatorname{tang} C \cos a).$$

Setzt man $\tan C \cos a = \cos\varphi$, so findet man

$$\cos A = \frac{\cos C \sin(B-\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Die Seite c erhält man durch die letzte der Formeln (9), nämlich durch

$$\cot c \sin a = \cot C \sin B + \cos a \cos B$$
$$= \cos a \left(\sin B \frac{\cot C}{\cos a} + \cos B\right).$$

Setzt man, wie oben geschehen,

$$\frac{\cot C}{\cos a} = \tan\varphi;$$ so bekommt man

$$\cot c = \frac{\cos a \cos(B-\varphi)}{\cos\varphi \sin a}.$$

Die Seite b läßt sich unmittelbar auf ähnliche Art finden.

Für den V. oder VI. Fall, wo zwei Seiten mit einem gegenüberliegenden Winkel oder zwei Winkel mit einer gegenüberstehenden Seite bekannt sind, wendet man zur Berechnung der fehlenden Stücke die Gleichungen (5) an.

§. 9. Bei jedem Problem der sphärischen Trigonometrie befinden sich unter den gegebenen Stücken ein Winkel und eine daran liegende Seite außer dem dritten Bestimmungsstücke, die Fälle ausgenommen, wo die drei Seiten oder die drei Winkel bekannt sind: in der Folge wollen wir diese Seite immer durch b und jenen Winkel durch A bezeichnen. Indem wir von dem Scheitel eines Winkels C (Fig. 6) einen Bogen CD senkrecht auf die Seite c fällen, wodurch letztere in zwei Segmente φ und φ', und ersterer in zwei Winkel ϑ und ϑ' zerlegt wird, haben wir:

$$c = \varphi + \varphi', \quad C = \vartheta + \vartheta'$$

wohl verstanden, daß in diesen Gleichungen einer der erwähnten Theile negativ wird, wenn der senkrechte Bogen außerhalb des Dreiecks fällt, welcher Umstand eintritt, sobald von den Winkeln A und B an der Basis der eine stumpf und der andere spitz ist; jener Bogen liegt hingegen innerhalb des Dreiecks, wenn diese beiden Winkel von einerlei Art sind. In der That erhält man mittelst der Gleichung (r) aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken ACD und BCD:

$$\tan CD = \tan A \sin\varphi = \tan B \sin\varphi'.$$

Wenn die Winkel A und B von derselben Art sind, so haben ihre Tangenten einerlei Zeichen; $\sin\varphi$ und $\sin\varphi'$ befinden sich daher in dem nämlichen Falle. Sind dagegen A und B von verschiedener Art, so müssen ihre Tangenten, mithin auch $\sin\varphi$ und $\sin\varphi'$ entgegengesetzte Zeichen besitzen: der senkrechte Bogen fällt alsdann außerhalb des Dreiecks, und das eine von den Segmenten φ und φ' hat allein das Minuszeichen.

§. 10. In der Figur 6 ist das Dreieck ABC in zwei andere rechtwinklige Dreiecke ACD, BCD zerlegt worden, welche einzeln behandelt werden können, und deren Auflösung die unbekannten Stücke vermittelst der gegebenen kennen lehrt. Dieß Verfahren führt auf einfache, für die logarithmische Rechnung bequeme Gleichungen, was jetzt gezeigt werden soll.

Man löst vorerst die Dreiecke ACD, BCD auf, um daraus einen der Theile φ oder ϑ der Seite c oder des Winkels C herzuleiten, wobei der Winkel A und die anliegende Seite b als bekannt vorausgesetzt werden. Die Gleichungen (p) und (q) des §. 5 liefern uns auf solche Weise die hier unten stehenden Gleichungen (1) und (2). Indem man aus jedem unserer Dreiecke den Werth des senkrechten Bogens CD sucht und diese Werthe einander gleichsetzt, erhält man die unten aufgeführten Gleichungen (5, 6, 7 und 8), welche bezüglich aus den Gleichungen (m, s, r und p) entspringen.

$$\tan\varphi = \tan b \cos A \;\ldots\; (1); \quad \cot\vartheta = \cos b \tan A \;\ldots\; (2);$$

$$c = \varphi + \varphi' \;\ldots\ldots\; (3); \quad C = \vartheta + \vartheta' \;\ldots\ldots\; (4);$$

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi} \;\ldots\ldots\; (5); \quad \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} \;\ldots\ldots\; (6);$$

$$\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} \;\ldots\ldots\; (7); \quad \frac{\tan a}{\tan b} = \frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta'} \;\ldots\ldots\; (8);$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \;\ldots\; (9).$$

Die verschiedenen Fälle und ihre Behandlungsweise mittelst der vorstehenden Gleichungen wollen wir nun durchnehmen, wobei übrigens jedesmal die geeignete Berücksichtigung der Zeichen der Sinus, Cosinus und Tangenten nicht zu vergessen ist, indem diese Zeichen positiv oder negativ werden, je nachdem gedachte Linien zu Bogen gehören, die $<$ oder $>$ 90^0 sind.

Außer den gegebenen Stücken A und b hat man noch ein drittes Bestimmungsstück.

1. Die Seite c ist bekannt; mithin kennt man die Seiten b und c und den eingeschlossenen Winkel A. Die Gleichung (1) gibt φ; (3) bestimmt φ'; diese Bogen können das Zeichen — erhalten. (5) gibt a; (7) liefert B; aus (9) folgt C, dessen Werth übrigens nach §. 9 als völlig bestimmt anzusehen ist.

2. Der Winkel C ist gegeben; man kennt also zwei Winkel A und C und die ihnen anliegende Seite b. Die Gleichung (2) bestimmt ϑ; (4) gibt ϑ', was negativ werden kann. Aus (6) folgt B; aus (8) ergibt sich a; aus (9) endlich c, dessen Gattung bekannt ist.

3. Man kennt a; also sind zwei Seiten a und b und der gegenüberstehende Winkel A gegeben. Die Gleichung (1) gibt φ; aus (5) wird φ' hergeleitet; aus (3) folgt C; aus (7) und (9) endlich B und C, oder auch ϑ aus (2); ϑ' aus (8); c aus (4); B und C endlich aus (6) und (9).

In dem vorliegenden Falle läßt die Aufgabe im Allgemeinen zwei Auflösungen zu: denn da φ' oder ϑ' durch einen Cosinus bestimmt wird, so hat der Bogen das doppelte Zeichen $\pm$; mithin haben c und C zwei Werthe, wofern nicht einer davon, als negativ, oder $>180^0$ zu verwerfen ist. Die Gleichungen (6) und (7) geben φ' ϑ' vermittelst ihrer Sinus, weshalb daraus zwei Werthe für B entspringen; ähnliches gilt für C und c.

4. Man kennt B; also zwei Winkel A und B und die gegenüberstehende Seite b. Die Gleichung (2) liefert ϑ; ϑ' ergibt sich aus (6); C aus (4); a und C aus (9). Oder auch: (1) liefert φ; φ' folgt aus (7); c aus (3); a und C aus (5 und 9). In diesem Falle gibt es auch noch zwei Auflösungen: denn wegen der Bestimmung von φ' und ϑ' durch den Sinus erhält der Bogen zwei Supplementarwerthe; also bekommen c in der Gleichung (3) und a in der Gleichung (8) zwei Werthe. Dasselbe gilt für a und c in (5 und 4). Es ist hier zu bemerken, daß man sich in jedem der vier eben behandelten Fälle entweder blos solcher Gleichungen, die mit geraden, oder blos solcher die mit ungeraden Zahlen bezeichnet sind, bedient. Bei einer etwaigen Wahl unter beiden Systemen wird man demjenigen, welches zu einfachern und genauern Resultaten führt, den Vorzug geben.

Anmerkung. Um ein sphärisches Dreieck, in welchem man entweder 2 Seiten und einen Winkel oder 2 Winkel und eine Seite kennt, aufzulösen, fälle man daher von einem der Scheitel einen senkrechten Bogen auf die gegenüberliegende Seite in der Art, daß dadurch zwei rechtwinklige Dreiecke entstehen, wo dann von dem einen zwei Stücke, außer dem rechten Winkel, als bekannt angesehen werden können. Der fragliche Bogen darf demnach im ersten Falle nicht von dem gegebenen Winkel ausgehen, und im zweiten Falle nicht auf die gegebene Seite fallen. Hierauf löse man gedachtes rechtwinkliges Dreieck auf, und berechne die beiden Segmente φ und φ' der Basis, oder die des getheilten Winkels. Die Gleichungen 5, 6, 7 und 8 lassen sich folgendermaßen ausdrücken:

1. Die Cosinus der zwei Seiten des Winkels, von welchem der senkrechte Bogen ausgeht, verhalten sich bezüglich wie die Segmente der Basis. Die Cotangenten dieser Seiten verhalten sich ferner respectiv wie die Cosinus der Theile gedachten Winkels.

2. Die Cotangenten der beiden Winkel an der Basis verhalten sich beziehungsweise wie die Sinus der Segmente derselben. Die Cosinus dieser Winkel endlich verhalten sich respectiv wie die Sinus der Stücke des getheilten Winkels.

§. 11. Aus dem Vorhergehenden wollen wir nun mehrere wichtige Folgerungen herleiten.

1. Die Gleichung (5) gibt (nach Buch IV. Seite 42)

$$\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} = \frac{\cos \varphi - \cos \varphi'}{\cos \varphi + \cos \varphi'},$$

woraus, wenn man erwägt, daß $c = \varphi + \varphi'$, entsteht:

$$\tan \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \tan \tfrac{1}{2}(a+b) \cdot \tan \tfrac{1}{2}(a-b) \cdot \cot \tfrac{1}{2} c \;\ldots\; (10).$$

Diese Gleichung lehrt uns aus den drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks die halbe Differenz der Segmente φ und φ' kennen, mithin auch diese Segmente selbst, weil $\frac{1}{2}$c deren halbe Summe ist. Durch Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke ACD, BCD findet man die Winkel A und B, nämlich:

$$\cos A = \tan \varphi \cot b,\quad \cos B = \tan \varphi' \cot a \;\ldots\; (11).$$

2. Die Gleichung (7) gibt auf ähnliche Weise (nach Buch IV. Seite 42)

$$\frac{\tang A - \tang B}{\tang A + \tang B} = \frac{\sin\varphi' - \sin\varphi}{\sin\varphi' + \sin\varphi} = \frac{\tang\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\tang\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)};$$ hieraus

$$\tang\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)}\tang\tfrac{1}{2}c \ldots (12).$$

Mit Hülfe dieser Formel werden φ und φ' berechnet, wenn die Winkel A, B und die dazwischen liegende Seite c bekannt sind. Die Gleichungen (11) bestimmen alsdann a und b.

3. Die Gleichung (6) gibt, wenn man auf die nämliche Weise verfährt:

$$\tang\tfrac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta) = \tang\tfrac{1}{2}(A + B)\cdot\tang\tfrac{1}{2}(A - B)\cdot\tang\tfrac{1}{2}C \ldots (13);$$

aus welcher Formel sich ϑ und ϑ' bestimmen lassen, wenn die drei Winkel A, B, C bekannt sind. Durch Auflösung der Dreiecke ACD, BCD erhält man ferner die Seiten a und b, nämlich:

$$\cos b = \cot\vartheta \cot A, \quad \cos a = \cot\vartheta' \cot B \ldots (14).$$

4. Die Gleichung (8) gibt endlich

$$\tang\tfrac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta) = \frac{\sin(a - b)}{\sin(a + b)}\cot\tfrac{1}{2}C \ldots (15)$$

Vermittelst dieser Formel berechnet man ϑ und ϑ' aus den gegebenen Seiten a, b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel C; worauf A und B durch die Gleichungen (14) bestimmt werden.

5. Die eben aufgestellten Gleichungen setzen uns in Stand, die unter dem Namen der Neperschen Analogien bekannten Formeln herzuleiten. Durch Gleichsetzung der Werthe (10) und (12) von $\tang\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$ erhalten wir, da $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

$$\tang\tfrac{1}{2}(a + b)\cdot\tang\tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A - B)\cdot\cos\frac{1}{2}(A - B)}{\sin\frac{1}{2}(A + B)\cdot\cos\frac{1}{2}(A + B)}\tang^2\tfrac{1}{2}c \ldots (16).$$

Die Gleichung (9) gibt aber

$$\frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B};$$

woraus (nach Buch IV. Seite 40)

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a - b)}{\tang\frac{1}{2}(a + b)} = \frac{\tang\frac{1}{2}(A - B)}{\tang\frac{1}{2}(A + B)}.$$

Multiplizirt man die letztere Gleichung Glied für Glied mit der Gleichung (16), so erhält man, nach geschehener Reduction und Ausziehung der Quadratwurzel;

$$\tan\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\tfrac{1}{2}c \;\ldots\; (17);$$

und durch Division der Gleichung (16) durch jene letztere:

$$\tan\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\tfrac{1}{2}c \;\ldots\; (17).$$

Vermittelst der beiden eben gefundenen Formeln (17) kann man zwei Seiten a und b eines sphärischen Dreiecks berechnen, wenn man die dritte Seite c und die anliegenden Winkel A und B kennt.

Anmerkung. Da $\tan\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}(A-B)$ eine positive Größe ist, so müssen $\tan\frac{1}{2}(a+b)$ und $\cos\frac{1}{2}(A+B)$ gleiche Zeichen haben; woraus hervorgeht, daß die halbe Summe irgend zweier Winkel, jederzeit von einerlei Art mit der halben Summe der beiden gegenüberliegenden Seiten ist, und umgekehrt.

6. Setzt man die Werthe von $\tan\frac{1}{2}(\vartheta'-\vartheta)$ aus (13 und 15) einander gleich, und verfährt dann mit der daraus hervorgegangenen Gleichung wie vorhin, was auch darauf hinausläuft, in die Gleichung (17), A und B mit a und b, und umgekehrt, ferner c mit C zu vertauschen; so entstehen folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\tan\tfrac{1}{2}(A-B)&=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}C,\\ \tan\tfrac{1}{2}(A+B)&=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}C,\end{aligned}\right\}\ldots(18)$$

welche, wenn man zwei Seiten a u. b und den eingeschlossenen Winkel C kennt, an die Stelle der vorhergehenden treten.

Anmerkung. Dividirt man bezüglich die Gleichungen (17) durch die Gleichungen (18), und nimmt dann die aus dem Satze

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\sin a+\sin b}{\sin A+\sin B}=\frac{\sin a-\sin b}{\sin A-\sin B}$$

hergeleiteten Resultate,

nämlich:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\cdot\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cdot\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)\cdot\cos\frac{1}{2}(A+B)},\text{ (nach Buch IV. Seite 41)},$$

zu Hülfe, um aus unsern vorher gefundenen Gleichungen abwechselnd $\sin\frac{1}{2}c$ oder $\cos\frac{1}{2}c$ zu eliminiren; so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cdot\cos\frac{1}{2}C,\\ \cos\frac{1}{2}(A-B)\cdot\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\cdot\sin\frac{1}{2}C,\\ \sin\frac{1}{2}(A-B)\cdot\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cdot\cos\frac{1}{2}C,\\ \cos\frac{1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\cdot\sin\frac{1}{2}C.\end{array}\right\}\ldots(19)$$

Diese vier Formeln heißen nach ihrem berühmten Erfinder: die Gauß'schen Formeln.

§. 12. Auflösung der gleichschenkligen Dreiecke. Es seien C und B die gleichen Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks (Fig. 7), b und c die gleichen Seiten, a die Grundlinie (dritte Seite), A der Winkel an der Spitze. Der Bogen, welcher die Spitze mit der Mitte der Basis eines solchen Dreiecks verbindet, liefert zwei symmetrische rechtwinklige Dreiecke, in denen die hier unten angeführten, aus den Combinationen der vier Elemente A, B, a, b, zu je 3 gebildeten, Relationen bestehen. Mit Hülfe derselben läßt sich jedes dieser Stücke bestimmen, wenn man die zwei andern kennt. Es hat demnach nicht die geringste Schwierigkeit von den vier Elementen eines gleichschenkligen sphärischen Dreiecks, nämlich dem Winkel A an der Spitze, der Basis a, einer der gleichen Seiten b und einem der gleichen Winkel B, zwei derselben zu berechnen, wenn die beiden übrigen gegeben sind.

$$\sin\tfrac{1}{2}a=\sin\tfrac{1}{2}A\,\sin b\ \ldots(n)$$
$$\cos b=\cot B\cot\tfrac{1}{2}A\ \ldots(q)$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a=\operatorname{tang}b\,\cos B\ \ldots(p)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}A=\cos\tfrac{1}{2}a\,\sin B\ \ldots(s).$$

Von den Aufgaben, welche zwei Auflösungen zulassen.

§. 13. Jedes sphärische Dreieck entsteht aus den Durchschnitten einer Kugel, vermittelst dreier durch ihren Mittelpunkt gelegten Ebenen. Die Figur 8 stellt die durch eine dieser Ebenen erzeugte Halbkugel

dar, deren größter Kreis KMK′ hier Grundkreis heißen mag; die beiden andern Ebenen, deren entsprechende Halbkreise $AC\alpha$, BCB''' man nur in der Perspektive sieht, haben den Radius CO zur Durchschnittslinie und bestimmen somit das sphärische Dreieck ABC. Der Bogen $C\alpha$ ist das Supplement des Bogens CA und A der Neigungswinkel der Ebene $AC\alpha$ gegen den Grundkreis. Indem durch den Radius CO die Ebene MCm senkrecht zum Grundkreis geführt und dann beiderseits gedachter Ebene $MCmMA'=MA$ genommen wird, erhält man eine zweite zu $AC\alpha$ symmetrische Ebene $A'C\alpha'$, und man hat,

$$m\alpha=m\alpha',\ AC=A'C,\ C\alpha=C\alpha',\ A=A'=\alpha=\alpha'.$$

Läßt man nun die Ebene $AC\alpha$ sich um den Radius CO drehen, und sie alle möglichen Lagen annehmen; so wird diese Ebene bei ihrem Zusammenfallen mit MCm senkrecht auf dem Grundkreis stehen, und in irgend einer andern Lage mit demselben zwei Supplementwinkel, wovon der eine oberhalb, der andere unterhalb seiner Ebene liegt, bilden. Die Bogen CB, CA, Cf... wachsen in dem Maße, als sie sich von dem senkrechten Bogen $CM=\psi$ entfernen, welcher der kleinste von allen ist, bis zu dem entgegengesetzten senkrechten Bogen Cm, welcher sie sämmtlich übertrifft. In der That gibt uns das rechtwinklige Dreieck ACM, wo $CA=b$, die Relation $\cos ACM = \cot b \operatorname{tang} \psi$, in welcher der Factor $\operatorname{tang}\psi$ constant bleibt. Wenn der Winkel ACM zu 90^0 angewachsen ist, was für den Bogen CK, dessen Ebene mit MCm einen rechten Winkel bildet, eintrifft; so hat man $\cot b=0$ und den Bogen $CK=90^0$. Bei einem weitern Drehen der Ebene gegen $C\alpha'$ hin wird $\cos ACM$ negativ und wächst, so wie auch $\cot b$; der Bogen $C\alpha'$ wird demnach fortfahren zuzunehmen. Außerdem ist auf beiden Seiten der Ebene MCm Alles symmetrisch, weshalb für gleiche Bogen MA, MA′ die entsprechenden Bogen und Winkel einander gleich sind, nämlich $CA=CA'$ und Winkel $A=A'$. Bei diesem Drehen neigt sich zuvörderst die schneidende Ebene immer mehr und mehr gegen den Grundkreis KMK′ hin, wobei nach und nach die Bogen CB, CA, CK zum Vorschein kommen. Denn das rechtwinklige Dreieck ACM gibt uns noch

$$\sin\psi = \sin b \sin A, \ldots (20),$$

in welcher Gleichung das erste Glied constant bleibt und $\sin b$ anfänglich im Zunehmen begriffen ist, wie vorhin nachgewiesen worden;

mithin nimmt sin A gleichzeitig ab. Sobald aber die Seite b zu 90^0 angewachsen ist, wo alsdann CB in $CK=90^0=MK$ übergeht, fängt sin b an sich zu vermindern; folglich nimmt sin A zu und der spitze Winkel A an der Basis, der im Punkte K seinen kleinsten Werth erlangt hat, fängt an zu wachsen. Der Punkt K ist der Pol des Kreises MCm, und der Winkel K hat auf der einen Seite der schneidenden Ebene den Bogen $CM=\psi$ und auf der andern Seite den Bogen $Cm=180^0-\psi$ zum Maße.

Aus dem Gesagten erhellet sonach, daß sämmtliche von C auslaufende und bis zu einem Punkte des halben Grundkreises KMK′ gehende Bogen weniger als 90^0 betragen, dagegen die nach KmK′ geführten Bogen 90^0 übersteigen, und $CK=CK'=90^0$ ist. Die Grenzen innerhalb welcher die fraglichen Bogen CA eingeschlossen werden, sind $CM=\psi$ und $Cm=180^0-\psi$. Ein solcher Bogen wird ferner desto kleiner, jemehr er sich dem CM nähert, während er desto größer wird, je näher er dem Cm kommt. — Der Neigungswinkel der Ebenen gegen den Grundkreis nimmt von 90^0 an, seinem Werthe in der Lage MCm, bei dem Uebergange in die Lagen CB, CA ... fortwährend ab bis nach CK hin, wo $K=\psi$ wird; hierauf wächst gedachter Winkel von K nach m zu, um in der Lage Cm wieder 90^0 zu erlangen. Der Winkel ist auf der nach CM zu gekehrten Seite spitz, dagegen stumpf auf der nach Cm hin gerichteten; die letztern Winkel, welche sämmtlich weniger als $180^0-\psi$ betragen, sind bezüglich Supplemente der erstern.

Endlich ist auf beiden Seiten von MCm Alles symmetrisch, so daß für zwei gleiche Bogen MA u. MA′, sowohl die Bogen CA, CA′ als ihre Winkel mit dem Grundkreise respectiv einander gleich sind. — Hiernach läßt sich also leicht ermitteln, ob der in irgend einem Dreiecke BCA, B′CA auf die Basis senkrecht gezogene Bogen innerhalb oder außerhalb dieses Dreiecks falle; auch erhält man zugleich hiermit eine Bestätigung der im Paragraphen 6 angeführten Sätze in Bezug auf die Größe der Seiten und Winkel rechtwinkliger sphärischer Dreiecke.

Die bisherigen Untersuchungen setzen uns in den Stand, in eine ausführliche Erörterung hinsichtlich der Probleme, welche zwei Auflösungen zulassen, und gewöhnlich den Namen der zweideutigen Fälle führen, einzugehen; es sind dies diejenigen, unter deren gegebenen Größen sich eine Seite und ihr gegenüberliegender Winkel befinden, wie es bei der 3ten und 4ten Aufgabe in §. 10 der Fall war.

§. 14. I. Fall. Es sind zwei Seiten a und b und ein gegenüberliegender Winkel A gegeben. Man schneide die Halbkugel KMK′ (Fig. 8) durch eine Ebene ACα, welche durch den Mittelpunkt O geht und den Winkel A mit dem Grundkreise bildet, mache ferner AC=b; C wird dann den Scheitel des Dreiecks abgeben, welches durch einen Bogen CB=a von bekannter Länge geschlossen werden soll. Diese Bedingungen wollen wir nun in nähere Betrachtung ziehen. Wir setzen dabei den Winkel A zuvörderst als spitz voraus; CA=b ist eine Seite des zu construirenden Dreiecks, welches durch die in den Raum αA′MA jedenfalls zu liegen kommende Seite a geschlossen wird; denn erhielte die Seite a eine andere Lage, wie Cf, Cα′ . . ., so würde das Dreieck CAf, CAα′ . . . statt des spitzen Winkels A einen stumpfen, welcher das Supplement des vorigen ist, haben. Die von C ausgehende Seite a muß also in irgend einem Punkte des Bogens AMA′α einschneiden. Die Bogen, wie CB und CB′, welche den Grundkreis in gleich weit von M entfernten Punkten B und B′ treffen, sind, so wie die von ihnen mit dem Grundkreis gebildeten Winkel gegenseitig einander gleich; man hat daher CA′=CA=b, CB′=CB=a, insofern MA′=MA, MB′=MB gemacht worden.

Wenn nun die Seite a<b ist, so fällt a innerhalb des Winkels A′CA, wie CB, CB′, und man hat zwei Dreiecke BCA, B′CA aus den gegebenen Elementen A, b und a construirt, d. h. man findet zwei Auflösungen für die Aufgabe. Einer der Winkel B an der Basis ist dann stumpf, der andere B′ hingegen spitz. — Jedoch für a>b fällt der Bogen A wie Cf′ und es kann nur ein einziges Dreieck ACf′ aus den gegebenen Bestimmungsstücken konstruirt werden, weil der rechts von A liegende und zu Cf′ symmetrische Bogen Cf hier ausgeschlossen bleibt, indem das hierdurch entstehende Dreieck einen Winkel A bekäme, der das Supplement des gegebenen wäre. Man hat demnach nur eine Auflösung, und der Winkel B des Dreiecks ACf′ ist spitz in f′, wie es auch b ist. Hat man endlich a>Cα=180⁰—b, so kommt a wie CB‴ zu liegen, was der Voraussetzung, daß alle Stücke des Dreiecks, einzeln genommen, kleiner als 180⁰ sein sollen, zuwiderläuft; folglich ist in dem verlangten Sinne gar kein Dreieck möglich. — Bisher war durchgängig b<90⁰, weil CA=b angenommen worden: hätte man aber b=Cα>90⁰ und fiele die Seite a wie CB oder CB′, so gibt es ebenfalls noch zwei Auflösungen BCα, B′Cα,

wovon die eine einen spitzen Winkel B, die andere einen stumpfen B′ an der Basis enthält. Dagegen würde man nur eine Auflösung αCf′ mit dem stumpfen Winkel f′ finden, wenn diese Seite a in den Raum A′Cα nach Cf′ zu liegen käme. Die Auflösung wird endlich unmöglich, wenn die Seite a eine Lage, wie die von CB′′′ annimmt.

Es folgt hieraus, daß im Falle der Winkel A spitz ist, b mag > oder < 90⁰ sein, es nur eine Auflösung gibt, wenn die Seite a in den Raum αCA′ fällt, d. h. wenn der Werth des Bogens a zwischen b und 180⁰—b liegt; der Winkel an der Basis ist dann gleichzeitig mit b spitz oder stumpf. Außerhalb dieser Grenzen gibt es zwei Auflösungen oder gar keine; das erstere findet statt, wenn a auf den Bogen AMA′ fällt, bei welchem Umstande a<90⁰; das zweite trifft ein, wenn a auf den Bogen αmα′ fällt, oder a>90⁰.

Wir gehen jetzt zu dem Falle über, in welchem der Winkel A stumpf ist, mithin die von C aus gezogene, das Dreieck schließende Seite a sich oberhalb der Ebene αCA befindet, wie Cf, CB′′.... Dieselbe Schlußfolgerung wie oben zeigt, daß, wenn b=Cα>90⁰ und die Seite a in den Raum αCα′ fällt, die Aufgabe zwei Auflösungen, wie αCB′′, αCB′′′ hat, und zwar die eine mit einem spitzen Winkel B′′′, die andere mit einem stumpfen B′′, an der Basis; daß ferner nur ein Dreieck KCα den gegebenen Bedingungen genügt, wenn die Seite a in den Raum α′CA zu liegen kommt, wo alsdann der Winkel K an der Basis mit b, gleichzeitig spitz oder stumpf wird; daß endlich kein Dreieck in dem verlangten Sinne möglich ist, wenn a auf den Bogen A′MA fällt. Auf ähnliche Art verfährt man im Falle die Seite b=CA<90⁰ ist.

Fassen wir dies kurz zusammen: Es gibt nur eine Auflösung, der Winkel A mag spitz oder stumpf sein, wenn die dem gegebenen Winkel A gegenüberliegende Seite a zwischen b und 180⁰—b fällt. Außerhalb dieser Grenzen läßt die Aufgabe zwei Auflösungen oder gar keine zu, je nachdem A und a gleichartig, d. h. beide zugleich > oder <90⁰, oder ungleichartig sind, d. h. das eine größer, das andere kleiner als 90⁰. Im Falle nur eine Auflösung möglich ist, sind B und b von gleicher Art.

Nun weiß man aber, daß der vom Scheitel C auf die Basis c senkrecht gelegte Bogen innerhalb oder außerhalb des Dreiecks fällt, je nachdem die Winkel A und B an der Basis gleichartig oder ungleichartig sind; in den Gleichungen $c=\varphi\pm\varphi'$, $C=\vartheta\pm\vartheta'$ wird man

daher das Zeichen + nehmen, wenn A und b gleichartig, dagegen das Zeichen —, wenn sie ungleichartig sind, eine Bedingung, wodurch die Auflösung völlig bestimmt ist. Die Untersuchung über den dritten Fall des 10. Paragraphen wäre hiermit abgeschlossen, da man weiß, welche von den beiden Auflösungen man zu nehmen hat. Soll also ein sphärisches Dreieck vermittelst zweier Seiten a, b und einem gegenüber liegenden Winkel A aufgelöst werden, so vergleiche man a mit b und 180^0—b: es gibt dann nur eine einzige Auflösung, wenn a mit einer von diesen Grenzen zusammenfällt oder zwischen denselben liegt; dabei sind B und b gleichartig; ferner werden C und c die Summe oder Differenz der entsprechenden Segmente sein, je nachdem die gegebenen Bogen A und b von gleicher oder ungleicher Art sind. Für Werthe von a außerhalb obiger Grenzen erhält man zwei Auflösungen, wenn A und a gleichartig sind, während im entgegengesetzten Falle das Dreieck in dem verlangten Sinne unmöglich ist.

Wir wollen noch bemerken, daß CM und Cm, nämlich ψ und $180^0-\psi$ der kleinste und größte Werth sind, welche die Seite a erhalten kann. Im Fall a nicht innerhalb dieser zwei Supplementarwerthe, welche die Gleichung (20) gibt, liegt, ist das Problem absurd, weil sich dann mit den gegebenen Elementen A, b und a kein Dreieck construiren läßt. Uebrigens erfordert dieser Fall gar keine weitere Rechnung, da er sich durch eine unausführbare Operation sofort zu erkennen gibt.

§. 15. II. Fall. Es sind zwei Winkel A, B mit einer gegenüberliegenden Seite b gegeben. Die Untersuchung des betreffenden Falles läßt sich gerade wie die bei dem vorhergehenden durchführen: mit Hinzuziehung der Eigenschaften des Polardreiecks A′ B′ C′ (Fig. 2) wird dieselbe jedoch einfacher. In diesem Dreiecke kennt man nämlich die Seiten $a'=180^0-A$, $b'=180^0-B$, und den Winkel $B'=180^0-b$. Nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten gehören solche Elemente zweien Dreiecken an, von denen nur eins der Aufgabe genügt, wenn die dem Winkel B gegenüberliegende Seite b′ zwischen a′ und $180^0-a'$, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn B zwischen A und 180^0—A enthalten ist. A und a müssen dann von gleicher Art sein; ferner werden C und c die Summe oder Differenz der entsprechenden Segmente abgeben, je nachdem die Bogen A und b gleichartig oder ungleichartig sind. Hat man also ein sphärisches Dreieck aus den gegebenen Stücken A, B und b zu construiren, so vergleiche

man B mit A und 180^0—A; man findet nur eine Auflösung, wenn B mit einem dieser Bogen zusammenfällt oder zwischen denselben liegt; dabei werden A und a von einerlei Art sein; in den Gleichungen $C=\vartheta\pm\vartheta'$, $c=\varphi\pm\varphi'$ gilt das Zeichen +, wenn die Bogen A und b gleichartig, dagegen das Zeichen —, wenn sie ungleichartig sind, wodurch wir erfahren, welche von den beiden Auflösungen beizubehalten oder zu verwerfen ist. Außerhalb jener Grenzen findet man zwei Auflösungen oder gar keine, je nachdem B und b gleichartig oder ungleichartig sind. Ueberdies muß der Winkel B zwischen den beiden durch die Gleichung (20) bestimmten Supplementarwerthen von ψ liegen, widrigenfalls sich kein Dreieck aus den gegebenen Stücken construiren läßt.

§. 16. Kennt man in einem rechtwinkligen Dreiecke, wo CM oder Cm (Fig. 8) eine der Seiten ist, einen Winkel und seine Gegenseite; so erhält man zwei Auflösungen, welche unter Umständen in eine übergehen.

1. Es sind die Hypothenuse a und eine Seite b gegeben, man sucht den Gegenwinkel B. Die Gleichung (n) im Paragraphen 5 bestimmt B durch einen Sinus, welcher zwei Supplementarbogen angehörig ist. Ebenso gibt uns dieselbe Gleichung, wenn aus der Hypothenuse a und dem Winkel B die Gegenseite b berechnet werden soll, zwei Werthe, welche Supplemente zu einander sind. In beiden Fällen erhält man jedoch nur eine Auflösung, weil die durch die beiden Bogen AC und CA′ geschlossenen Dreiecke CMA, CMA′ symmetrisch zu einander sind; B und b sind gleichartig und die Zweideutigkeit verschwindet.

2. Eine Kathete b nebst ihrem Gegenwinkel B sind gegeben; man sucht die übrigen Stücke. Die Hypothenuse a findet man mit Hülfe der Gleichung (n), die dritte Seite aus der Gleichung (r) und endlich den Winkel C aus der Gleichung (s). Da man die gesuchten Elemente sämmtlich durch ihre Sinus ausgedrückt erhält, so können diese sowohl spitzen Winkeln als auch ihren Supplementen angehören, weshalb eine Zweideutigkeit in Betreff der Größe der gefundenen Elementen entsteht.

§. 17. Wir wollen nun diese Aufgaben durch einige numerische Beispiele erläutern.

I. Es sei $a=133^0\ 19'$, $b=57^0\ 28'$, $A=45^0\ 23'$. Das Dreieck ist unmöglich, weil a nicht zwischen $57^0\ 28'$ und seinem Supplementen $122^0\ 32'$ enthalten ist, überdies A und a ungleichartig sind.

II. Dasselbe ereignet sich für $A=120^0$, $B=51^0$, $b=101^0$; weil B nicht zwischen 120^0 und 60^0 liegt, und B mit b ungleichartig ist.

III. Es sei $b=40^0\ 0'\ 10''$, $a=50^0\ 10'\ 30''$, $A=42^0\ 15'\ 14''$.

Man hat nur eine Auflösung, weil a zwischen b und 180^0-b liegt; B ist $<90^0$, ferner sind φ und φ' positiv, indem der von der Winkelspitze senkrecht geführte Bogen innerhalb des Dreiecks fällt; mithin ist c die Summe dieser Bogen.

Die Gleichungen (1, 5 und 3) des Paragraphen 10 geben

tang b . . . 0,9238563—1	cos a . . . . . 0,8064817—1	$\varphi=31^0\ 50'\ 46''$
cos A . . . 0,8693330—1	cos φ . . . . . 0,9291471—1	$\varphi'=44^0\ 44'\ 50''$
tang a . . . 0,7931893—1	cos b . . . —0,8842363—1	$c=76 \cdot 35 \cdot 36.$
	cos φ' = 0,8513925—1	

Zur Auffindung des Winkels C an der Spitze liefern uns die Gleichungen (2, 8 und 4)

cos b . . . 0,8842363—1	tang b . . . 0,9238563—1	$\vartheta=55^0\ 9'\ 59''$
tang A . . . 0,9583058—1	cot a . . . 0,9211182—1	$\vartheta'=66 \cdot 26 \cdot 21$
cot ϑ = 0,8425421—1	cot ϑ . . . 0,7567851—1	$C=121 \cdot 36 \cdot 20$
	cos ϑ' . . . 0,8017596—1	

Die Regel der Sinus gibt $B=34^0\ 15'\ 3''$.

IV. Für $B=42^0\ 15'\ 14''$, $A=121^0\ 36'\ 20''$, $b=50^0\ 10'\ 30''$ bekommt man zwei Auflösungen, weil B nicht zwischen A und seinem Supplemente enthalten ist, dabei B und b von einerlei Art sind.

Die Gleichungen (2, 6 und 9) führen uns auf folgende Rechnungen:

cos b ... 0,8064817—1	cos B ... 0,8693340—1	sin b ..... 0,8853636—1
tang A ... 0,2108864—	sin ϑ ... 0,8406262—1 —	sin A ..... 0,9302745—1
cot ϑ ... 0,0173681—	cos A ... —0,7193880—1 —	sin B ... —0,8276379—1
$\vartheta=-43^0\ 51'\ 16''$	sin ϑ' = 0,9905712—1 +	sin a ...... 0,9880002—1
$\vartheta'=78 \cdot 6 \cdot 19$ oder $101^0\ 53'\ 41''$		$a=76^0\ 35'\ 36''$
$C=34 \cdot 15 \cdot 3$ oder $C=58 \cdot 2 \cdot 25$ oder		$a=103 \cdot 24 \cdot 24$

tang b ... 0,0788818 cot B ... 0,0416956
cos A ... 0,7193874—1 — tang A ... 0,2108873—
tang φ ... 0,7982692—1 — sin φ ... 0,7259905—1—
φ = —32° 8′ 50″ sin φ' ... 0,9785734—1+
φ' = 72 · 9 · 0 oder φ'=107° 51′ 0″
c=40 · 0 · 10 oder c = 75 · 42 · 10

Die eine dieser Auflösungen entspricht dem Dreiecke fCA′, die andere dem Dreiecke f′CA′ (Fig. 8).

V. Es sind die drei Seiten a, b, c gegeben; man sucht einen Winkel C.

Es sei a= 76° 35′ 36″ sin ... 0,9880008—1
b= 50·10 · 30 sin ... 0,8853636—1
c= 40 · 0 · 10
2p=166 · 46 · 16 —0,8733644—1
p= 83·23· 8
p—a= 6·47·32 sin ... 0,0728716—1
p—b=33·12·38 sin ... 0,7385565—1
sin² ... 0,9380637—2
½C=17· 7·31,4 sin ... 0,4690318—1
C=34·15· 2,8.

Die andern Elemente des Dreiecks sind:

A=121° 36′ 19″, 8; B=42·15·13,7; ψ=40·51·3;

die Werthe von φ, φ', ϑ, ϑ' sind in der vorigen Aufgabe angegeben, indem das Dreieck dort das nämliche ist.

VI. Zwei Seiten a, b nebst dem eingeschlossenen Winkel C sind gegeben; man sucht die übrigen Stücke.

Es sei a=50° 54′ 32″, also $\frac{a+b}{2}$ =44° 20′ 55″
b=37° 47′ 18″ $\frac{a-b}{2}$ =6·33·37
C=119° 55′ 6″, 06 ½C= 59·57·33, 03.

$$\begin{array}{ll}
\cos\frac{1}{2}(a-b)\ \ldots & 0{,}9971470-1 \\
\cot\frac{1}{2}C\ \ldots & \underline{0{,}7621537-1} \\
 & 0{,}7593007-1 \\
\cos\frac{1}{2}(a+b) & \underline{0{,}8543667-1} \\
\tan\frac{A+B}{2}\ \ldots & 0{,}9049340-1.
\end{array}$$

Ferner

$$\begin{array}{ll}
\sin\frac{1}{2}(a-b)\ \ldots & 0{,}0578503-1 \\
\cot\frac{1}{2}C\ \ldots & \underline{0{,}7621537-1} \\
 & 0{,}8260040-2 \\
\sin\frac{1}{2}(a+b)\ \ldots & \underline{0{,}8444910-1} \\
\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)\ldots & 0{,}9755130-2.
\end{array}$$

Also

$\frac{1}{2}(A+B)=38^0\ 46'\ 42'',73$

$\frac{1}{2}(A-B)=\ 5\cdot 23\cdot 57,\ 92$; daher

$A=44^0\cdot 10'\ 40'',\ 65,$

$B=33\cdot 22\cdot 44,\ 81.$ Für die dritte Seite c findet man . . . . . $74^0\ 51'\ 59'',83.$

Wir beschließen die sphärische Trigonometrie, indem wir sämmtliche Stücke eines sphärischen Dreiecks angeben, um damit eine Gelegenheit zur Uebung im Gebrauch unserer Formeln darzubieten; die Rechnung wird nämlich drei von diesen Stücken wieder liefern müssen, wenn man drei andere nach Belieben als bekannt ansieht.

Sphärisches Versuchs-Dreieck.

Bogen.	Log. Sinus.	Log. Cosinus.	Log. Tang.
A= 121°36′19″81	0,9302747—1	0,7193874—1—	0,2108873—
B= 42·15·13,66	0,8276379—1	0,8693336—1	0,9583043—1
C= 34·15· 2,76	0,7503664—1	0,9172860—1	0,8330804—1
a= 76·35·36, 0	0,9880008—1	0,3652279—1	0,6227729
b= 50·10·30, 0	0,8853636—1	0,8064817—1	0,0788819
c= 40· 0·10, 0	0,8080926—1	0,8842363—1	0,9238563—1
φ=—32· 8·50, 0	0,7259905—1—	0,9277212—1	0,7982693—1—
φ'= 72· 9· 0, 0	0,9785741—1	0,4864674—1	0,4921067
ϑ=—43·51·16, 2	0,8406263—1—	0,8579964—1	0,9826249—1—
ϑ'= 78· 6·19, 0	0,9905733—1	0,3141076—1	0,6764657
Man hat für den senkrechten Bogen			
ψ=40·51·3,0	0,8156388—1	0,8787620—1	0,9368787—1

Denjenigen Lesern, welche sich in der Auflösung sphärisch trigonometrischer Aufgaben verschiedener Art zu üben wünschen, können wir zu diesem Behufe folgende Werke empfehlen:

1. Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch, zweiter Theil. Berlin bei Frölich.
2. Uebungen aus der reinen und angewandten Stereometrie von Dr. Ephraim Salomon Unger. Berlin bei List.

Zweites Kapitel.

Von den Flächen und Linien im Raume.

Allgemeine Sätze.

§. 18. Um die Lage eines Punktes M (Fig. 9) im Raume zu bestimmen, denke man sich drei feste und ihrer Lage nach bekannte Ebenen, welche sich alle in einem Punkte A, und je zwei in den verschiedenen Geraden Ax, Ay, Az, die man Coordinatenachsen nennt, schneiden; der leichtern Auffassung wegen mögen vorerst jene drei Ebenen zAx, zAy, xAy, welche Coordinatenebenen heißen, senkrecht zueinander stehen. Hierauf projicire man den fraglichen Punkt M auf eine dieser Ebenen, so das MP oder $z=c$ als bekannt anzusehen ist; man ziehe ferner die Coordinaten der Projection P in gedachter Ebene, nämlich AN oder $x=a$, und AS oder $y=b$; die gegebenen Größen a, b, c, welche nichts anders als die Entfernungen des vorgelegten Punktes M von den drei Coordinatenebenen sind, werden, wie in der ebenen Geometrie, die Coordinaten des Punktes genannt. Der in Rede stehende Punkt gibt zugleich die Spitze des rechtwinkligen Parallelepiped's QN ab, das aus den drei den Coordinaten MQ, MR, MP bezüglich gleichen Seiten AN, AS, AT construirt wird.

Zur völligen Bestimmung der Lage des Punktes M muß man außer dem absoluten Werthe der Größen a, b, c auch noch die Vorzeichen derselben berücksichtigen, damit man erfahre, in welche, von den durch die Coordinatenebenen um den Ursprung A gebildeten acht dreikantigen Ecken unser Punkt zu liegen komme. Aehnlichen Betrachtungen zufolge, wie solche in der ebenen Geometrie angestellt worden, werden wir, die drei als fest angenommenen Ebenen unendlich verlängert gedacht, für die unterhalb der Ebene xAy befindlichen Punkte die z als negativ ansehen; ebenso wird x negativ, wenn der Punkt auf der linken Seite der Ebene zAy, desgleichen wird y es sein, wenn der Punkt hinter der Ebene zAx liegt.

Anmerkungen. 1. Nimmt man die Coordinatenebenen nicht senkrecht, sondern in irgend einer andern Lage gegen einander an; so hat man ein schiefwinkliges Coordinatensystem. Die in den Gleichungen eines Punktes, nämlich $x=a$, $y=b$, $z=c$ vorkommenden Größen a, b, c bezeichnen dann nicht mehr, wie im rechtwinkligen Coordinatensystem, die Abstände des in Frage stehenden Punktes von den drei Coordinatenebenen, sondern die mit den schiefen Achsen bezüglich parallelen Coordinaten; unser Punkt ist in diesem Falle die dem Ursprung diagonal gegenüber liegende Spitze des schiefwinkligen Parallelepipeds, das aus den drei Coordinaten construirt ist.

2. Jeder Punkt im Raume hat stets zwei Coordinaten mit jeder seiner Projectionen gemeinschaftlich: so haben M und P das nämliche x und y; M und R besitzen dasselbe x und z; endlich gelten für M und Q einerlei y und z.

3. Zwei Projectionen eines Punktes haben immer eine gemeinschaftliche Coordinate: so haben die Projectionen P und R das nämliche x; P und Q haben dasselbe y; endlich besitzen Q und R einerlei z.

4. Die drei Gleichungen $x=a$, $y=b$, $z=c$, welche den Punkt M bestimmen, leisten hier das nämliche, wie zwei seiner Projectionen, mit Hülfe deren die Lage eines Punktes in der darstellenden Geometrie bestimmt wird, indem sich die vier Gleichungen dieser zwei Projectionen, wie $x=a$, $y=b$ und $x=a'$, $z=c$, auf drei reduciren, weil $a=a'$.

§. 19. Es sei $f(x, y, z)=0$ eine Gleichung zwischen drei Coordinaten: Nehmen wir darin zwei dieser veränderlichen willkürlich an, z. B. $x=a=AN$, $y=b=PN$ (Fig. 9), so wird sich daraus wenigstens ein entsprechender Werth $z=c$ ergeben. Im Fall c reell ist, errichtet man in P auf die Ebene yAx eine Senkrechte $PM=c$, wodurch ein Punkt M im Raume bestimmt wird.

Indem man für x und y andere willkührliche Werthe annimmt, d. h. auf der Ebene xAy nach Belieben verschiedene Punkte wählt, kann man aus der vorgelegten Gleichung eben so viele dazugehörige Werthe von z berechnen: die sämmtlichen auf diese Weise erhaltenen Punkte M werden eine Fläche bestimmen, welche man dadurch bildet, daß

man jene Punkte sich untereinander vereinigt denkt, und sie dabei das Gesetz der Stetigkeit befolgen läßt; so kann z. B. diese Fläche ein Kegel, ein Cylinder, eine Kugel sein. Die Gleichung $f(x, y, z)=0$, welche alle Punkte der Fläche charakterisirt und nur für die Punkte dieser Fläche gilt, heißt die Gleichung der Fläche. Hat z mehrere reelle Werthe, so besitzt unsere Fläche mehrere Flächenäste oder Mäntel, während sie für imaginäre Werthe von z, von den in P auf der Ebene xy errichteten Senkrechten nicht getroffen wird.

Nimmt man für y einen bestimmten Werth an, z. B. $y=b=AS$, und gibt dann dem x verschiedene Werthe; so wird die Ordinate $PM=z$ sich der zur Achse der x parallel laufenden Geraden SP entlang fortbewegen: die dabei stattfindenden Aenderungen von z ergeben sich aus der Gleichung $f(x, b, z)=0$, die demnach nichts anders als die Gleichung des Durchschnitts unserer Fläche mit der zur Ebene der xz parallelen Ebene SMQP, zwischen den zwei, in der letztern Ebene gezählten Coordinaten x und z ist. Eben so bekommt man für $x=a$ oder $z=c$ die Durchschnitte der Fläche mit den Ebenen MN oder QR, welche zu den Coordinatenebenen yz oder xy parallel laufen.

Die Gleichung $z=0$ gehört offenbar der Ebene xy an, und $z=c$ einer der letztern in dem Abstand c parallel geführten Ebene; desgleichen ist $x=0$ die Gleichung der Ebene yz, und $x=a$ die, der in dem Abstande a derselben parallel laufenden Ebene.

§. 20. Das rechtwinklige Dreieck AMP gibt $z^2+AP^2=AM^2$; daraus entsteht, wenn man das rechtwinklige Dreieck APN zu Hülfe nimmt und $AM=R$ setzt:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

1. Der Abstand eines Punktes vom Ursprunge ist also gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate seiner drei Coordinaten.

2. Sind x, y und z veränderlich, so gilt die Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

für alle Punkte, die vom Ursprunge gleichweit entfernt sind; sie ist daher die Gleichung der Kugel, welche den Ursprung zum Mittelpunkt und R zum Radius hat.

Es seien $N(x, y, z)$ und $M(x', y', z')$ zwei Punkte (Fig. 10), n und m ihre Projectionen in der Ebene xy, mithin mn die der Geraden $MN=R$. Zieht man MP parallel zu mn, so entsteht das rechtwinklige Dreieck MNP, welches gibt

$$MN^2=MP^2+PN^2=mn^2+PN^2, \text{ oder}$$

$$R^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,$$ wenn man erwägt, daß $$mn^2=(x-x')^2+(y-y')^2$$ und $$PN=Nn-Mm=z-z';$$

die Entfernung R zweier Punkte im Raume wäre hiernach durch ihre Coordinaten x, y, z und x', y', z' bestimmt.

Betrachtet man x, y, z als veränderlich, so ist unsere Gleichung die einer Kugel, welche R zum Halbmesser hat und deren Mittelpunkt im Punkt $M(x', y', z')$ liegt.

Anmerkungen. 1. Die zu Ay parallel laufenden Geraden mB, nC geben $BC=x-x'=$ der Projection von MN auf die Achse der x; mithin ist die Länge einer Linie im Raume gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf die drei Coordinatenachsen.

2. Aus der Gleichung $MP=MN \cdot \cos NMP$ folgt, daß die Projection einer begrenzten Linie auf eine Ebene gleich dem Producte jener Linie mit dem Cosinus ihres Neigungswinkels gegen diese Ebene ist; und umgekehrt ist eine Linie im Raume gleich dem Quotienten ihrer Projection durch den Cosinus des Neigungswinkels gegen die Projectionslinie. Eben so ist die Projection irgend einer begrenzten ebenen Figur F gleich $F \cos \alpha$, wo α den Neigungswinkel derselben gegen die Projectionsebene darstellt.

§. 21. Wir wollen uns einen geraden Cylinder mit beliebiger Basis vorstellen, welche Basis eine durch die Gleichung $f(x, y)=0$ gegebene in der Ebene xy liegende Curve ist. Die unsere Gleichung $f(x, y)=0$ gleichzeitig befriedigenden Werthe von x, y werden die Coordinaten einer dem Cylinder als Basis dienenden Curve sein, so daß das in gedachtem Punkte auf die Ebene xy errichtete Perpendikel eine Erzeugungslinie unseres Cylinders abgibt, wonach für jeden beliebigen dem z beigelegten Werth der Endpunkt dieses Perpendikels sich auf der Cylinderfläche befindet, in welchem Punkte man dasselbe

auch begrenzt denken mag. Die Gleichung einer cylindrischen, mit der Achse der z parallelen Fläche ist also die ihrer Basis, oder $f(x, y)=0$.

Aehnliches gilt von den Gleichungen $\varphi(x, z)=0$, $\psi(y, z)=0$, deren jede, einzeln genommen, einem mit der Achse der y oder der der x parallelen Cylinder zugehört.

Dieselbe Schlußweise zeigt, daß die auf einer der Coordinatenebenen senkrecht stehende Ebene die nämliche Gleichung wie ihr Grundschnitt oder Trace auf dieser Coordinatenebene hat. Es gilt daher, wenn $AB=\alpha$ (Fig. 11) und $a=\tang CBI$ gesetzt wird, für die in der Ebene zAx liegende Linie BC sowohl, als auch für die durch diese Linie auf die Ebene zAx senkrecht gelegte Ebene FEBC die Gleichung $x=az+\alpha$.

§. 22. Es seien $M=0$, $N=0$ die Gleichungen zweier beliebigen Flächen. Sieht man dieselben als gleichzeitig bestehend an, so gehören sie den auf beiden Flächen zugleich liegenden Punkten, d. h. ihrem gemeinsamen Durchschnitte, an. Ein Punkt wäre demnach durch drei Gleichungen zwischen x, y, z, aus welchen auch die Coordinaten dieses Punktes sich berechnen lassen, bestimmt; während eine Gleichung für sich eine Fläche darstellt, und ein System zweier gleichzeitig geltenden Gleichungen einer Linie entspricht, nach der sich die durch jene Gleichungen repräsentirten Flächen schneiden. Da man durch eine gegebene Linie sich eine unendliche Anzahl von Flächen gelegt denken kann, so folgt hieraus, daß eine und dieselbe Linie im Raume eine unendliche Anzahl von Gleichungen besitzt.

Durch Elimination von z zwischen $M=0$, $N=0$ entsteht eine Gleichung $P=0$ zwischen x und y, welche dem, unsere beiden Flächen in der fraglichen Linie schneidenden, geraden Cylinder, zugleich aber auch der Projektion dieser Linie auf der Ebene xy angehören wird. Auf ähnliche Art erhält man durch die Elimination von y die Gleichung $Q=0$ der Projection unserer Linie gegen die Ebene xz oder die des projicirenden Cylinders. Die Gleichungen $P=0$, $Q=0$ stellen, wie gesagt, die Projectionen unserer Linie, zugleich auch zwei durch die Linie gehende, projicirende Cylinderflächen dar, welche man statt der gegebenen Flächen substituiren kann; es können daher mit den

Gleichungen einer Linie, die ihrer Projectionen auf zwei der Coordinatenebenen, als gleichbedeutend angesehen werden.

§. 23. Die aufgestellten Grundsätze mögen nun ihre Anwendung auf die gerade Linie finden. Als Gleichungen derselben können die zweier beliebigen Ebenen, in denen sie enthalten ist, gelten; es ist aber zweckmäßig, darunter solche zu wählen, welche zu den einfachsten Resultaten führen. Die Achse der z hat $x=0$, $y=0$ zu Gleichungen, welche beziehungsweise den Ebenen yz und xz angehören.

Eben so sind $x=\alpha$, $y=\beta$ die Gleichungen einer zur Achse der z parallel geführten Geraden PM (Fig. 9), deren Fußpunkte P auf der Ebene xy die Coordinaten $x=\alpha$, $y=\beta$ entsprechen. Aehnliches gilt für die zwei andern Achsen.

Es sei EF (Fig. 11) eine beliebige Gerade im Raume. Indem durch sie die projicirende Ebene FEBC auf die Ebene xz geführt wird, bekommt man die Projection BC der Geraden auf dieser Ebene. Auf ähnliche Weise erhält man ihre Projection HG auf der Ebene yz, so daß unsere Gerade EF durch die Gleichungen gedachter Projectionen oder der projicirenden Ebenen vollkommen bestimmt ist, nämlich:

$$x=az+\alpha \text{ und } y=bz+\beta,$$

wobei α und β die Coordinaten AB, AG des Durchschnittspunktes E der Geraden EF mit der Ebene xy, ferner a und b die trigonometrischen Tangenten der Winkel sind, welche ihre Projectionen BC, HG mit der Achse Az bilden. Durch Elimination von z aus den beiden obigen Gleichungen ergibt sich

$$ay=bx+a\beta-b\alpha,$$

als Gleichung der dritten Projection unserer Geraden auf der Ebene xy.

Anmerkungen. 1. Für die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Geraden mit den Coordinatenebenen yz und xz findet man bezüglich:

$$z=-\frac{\alpha}{a},\ y=-\frac{b\alpha}{\alpha}+\beta, \text{ und}$$

$$z=-\frac{\beta}{b},\ x=-\frac{a\beta}{b}+\alpha.$$

2. Bei einem schiefwinkligen Achsensysteme würden die Projectionen BC, HG, wofern man sie nur durch projicirende Ebenen, welche zu den Achsen parallel gehen, erhalten hätte, noch immer Gleichungen von der Form $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ haben; die Constanten a und b drücken aber dann Sinusverhältnisse aus.

§. 24. Soll die Gerade EF (Fig. 11) durch einen gegebenen Punkt (x' y' z') gehen, so werden die Projectionen C und H dieses Punktes auf denen der Geraden liegen; mithin erhält man:

$$x-x'=a(z-z'),\quad y-y'=b(z-z')$$

für die Gleichungen einer durch den Punkt (x' y' z') gezogenen Geraden.

Die Constanten lassen sich bestimmen, wenn die Gerade noch durch einen zweiten bekannten Punkt (x'', y'', z'') geht. Die Gleichungen der durch zwei gegebene Punkte gehenden Geraden sind dann:

$$x-x'=\frac{x'-x''}{z'-z''}(z-z'),\quad y-y'=\frac{y'-y''}{z'-z''}(z-z').$$

Die Gleichungen einer durch den Ursprung A geführten Geraden sind:

$$x=az,\quad y=bz.$$

Will man, daß zwei Geraden zu einander parallel laufen, so müssen auch ihre Projectionen bezüglich parallel sein. Hieraus ergeben sich für die Glieder in z die nämlichen Constanten a und b, wonach die Gleichungen solcher Geraden nur durch die Werthe der Constanten α und β von einander unterschieden sind.

Gleichungen der Ebene, der cylindrischen, conischen und Rotations-Flächen.

§. 25. Wie auch immer die Bedingungen beschaffen sein mögen, wodurch der Charakter einer Fläche bestimmt wird, so kommen sie doch allemal zuletzt darauf zurück, das Gesetz ihrer Erzeugung anzugeben, welches darin besteht, daß eine Linie, welche der Form nach beständig oder veränderlich ist und die **Erzeugungslinie** heißt, an einer oder mehreren bestimmten Linien: die **Richtungslinien** genannt werden, fortgleitet. Die Gleichung der so entstandenen Fläche erhält man, wenn hier ähnlicherweise wie im §. 152 der analytischen Geometrie der Ebene verfahren wird, was wir jetzt an ver-

schiedenen Beispielen zeigen wollen, indem wir mit der Ebene den Anfang machen.

Eine Ebene DC (Fig. 12) entsteht dadurch, daß eine Gerade EF auf zwei anderen sich schneidenden Geraden hingleitet. Die Grundschnitte BC, BD ihrer Ebene mit den Coordinatenebenen xz, yz treffen einander auf der Achse der z im Punkte B und haben folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y=0,\ z=Ax+C\ \ldots \text{ für } BC, \\ x=0,\ z=By+C\ \ldots \text{ für } BD, \end{array}\right\} \ldots (1)$$

wo AB=C gesetzt worden. Indem der Grundschnitt BC parallel zu sich der Linie BD entlang fortbewegt wird, entsteht die Ebene BDC, was analytisch auszudrücken unsere Aufgabe ist. Es sei deshalb EF irgend eine von den zu BC parallelen Linien im Raume; die projicirende Ebene EHIF wird zur Coordinatenebene zx und der Grundschnitt HI parallel zu Ax sein. Die Gleichungen der zu BC parallelen Geraden EF sind mithin:

$$y=\alpha,\ z=Ax+\beta\ \ldots (2)$$

Um den Durchschnittspunkt E der beweglichen Geraden EF mit der unbeweglichen Richtungslinie BD zu erhalten, eliminiren wir x, y und z zwischen den zwei letzten der Gleichungen (1) und den Gleichungen (2) was uns zu folgender Bedingungsgleichung:

$$\beta=B\alpha+C\ \ldots (3)$$

führt, welche nichts anderes aussagt, als daß die Linien BD und EF einander schneiden.

Läßt man also den Größen α und β solche Werthe zukommen, die der Bedingungsgleichung Genüge thun; so ist man sicher in den Gleichungen (2) diejenigen zu erhalten, welche der Erzeugenden in dieser oder jener besondern Lage entsprechen. Indem wir nun in die Gleichung (2) statt β seinen Werth $B\alpha+C$ einführen, werden wir die einer Erzeugenden gewinnen, deren Lage von dem der willkührlichen Größe α beigelegten Werthe abhängig sein wird. Wenn man folglich nun noch α oder von vornherein α und β zwischen den 3 Gleichungen (2) und (3) eliminirt, so wird die daraus resultirende Gleichung

$$z=Ax+By+C$$

allen Lagen der Erzeugenden angehören, oder die Gleichung der Ebene sein, welche dieselben sämmtlich in sich begreift.

C ist der Abstand des Durchschnittspunktes der Ebene mit der Achse der z vom Ursprunge; A und B sind die trigonometrischen Tangenten der Winkel, unter welchen die Grundschnitte BC, BD der Ebene mit den Coordinatenebenen xz und yz die Achsen der x und der y schneiden.

Läßt man C verschiedene Werthe annehmen, hingegen A und B unverändert, so rückt die Ebene parallel zu sich fort, weil ihre Grundschnitte zu einander parallel bleiben. Aus dem Gesagten ergeben sich leicht nachstehende Folgerungen:

1. Die Gleichung der Ebene ist in Bezug auf die drei Variabeln x, y, z vom ersten Grade; und umgekehrt jede Gleichung des ersten Grades zwischen drei Veränderlichen, wie $Ax+By+Cz+D=0$ gehört einer Ebene an.

2. Die Grundschnitte einer Ebene, deren Gleichung $z=Ax+By+C$ gegeben ist, erhält man, wenn man ihre Gleichung mit einer der folgenden: $z=0$, $y=0$, $x=0$ verbindet, von denen jede eine der drei Coordinatenebenen darstellt. So ist der Grundschnitt auf der Ebene xy durch

$$z=0, \quad Ax+By+C=0,$$

der Grundschnitt auf der Ebene xz durch

$$y=0, \quad z=Ax+C,$$

und endlich der Grundschnitt mit der Ebene yz durch

$$x=0, \quad z=By+C$$ gegeben.

3. Um den Punkt zu bekommen, in welchem die Achse der x von der Ebene geschnitten wird, setzen wir $y=0$ und $z=0$: man erhält dann $x=-\frac{C}{A}$. Eben so hat man für den Durchschnittspunkt mit der Achse der y, die Gleichungen $x=0$, $z=0$; woraus $y=-\frac{C}{B}$. Stellt man diese zwei Abstände vom Ursprung bezüglich durch D und E dar, und führt sie statt A und B in die Gleichung $z=Ax+By+C$ ein; so nimmt die letztere folgende symmetrische Form an

$$\frac{z}{C}+\frac{x}{D}+\frac{y}{E}=1.$$

4. Man könnte die Gleichung der Ebene auch dadurch erhalten, daß man irgend eine Gerade im Raume als Erzeugungslinie annähme, und solche dann sich auf einem der Grundschnitte fortbewegen ließe, oder auch dadurch, daß man irgend eine Gerade $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ als Richtungslinie wählte, und $x=a'z$, $y=b'z$ als die Linie betrachtete, welcher die bewegliche Erzeugungslinie beständig parallel bleiben soll; in diesem Falle hätten die Gleichungen der Erzeugungslinien folgende Form:

$$x=a'z+\alpha', \quad y=b'z+\beta',$$

wo a', b' constant sind, α', β' dagegen sich mit jeder Lage der Erzeugungslinie ändern.

Anmerkungen. 1. Soll die Ebene mit einer der Achsen, z. B. mit der Achse der x, parallel sein, so muß D unendlich groß, oder was dasselbe ist, $A=0$ werden. Für eine solche Ebene hat man dann $z=By+C$.

2. Soll die Ebene den beiden Achsen der x und y zugleich, oder was auf Dasselbe heraus kommt, der Ebene xy parallel sein; so muß $A=B=0$ werden; für eine solche Ebene ist dann $z=C$. Diese beiden Resultate stimmen völlig mit dem im §. 19 Gesagten überein.

3. Um die durch die Gleichung $Ax+By+Cz+D=0$ dargestellte Ebene zu construiren, bringe man vorerst unsere Gleichung auf die Form:

$$z=-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y-\frac{D}{C};$$

hierauf ziehe man in der Coordinatenebene xz die Gerade $z=-\frac{A}{C}x$, ferner in der Coordinatenebene yz die Gleichung $z=-\frac{B}{C}y$; alsdann lege man durch diese beiden Linien eine Ebene, und endlich durch den Punkt der Achse der z, welcher vom Ursprung um $-\frac{D}{C}$ entfernt ist, eine Ebene zu jener parallel.

4. Die oben angewendeten Schlüsse und Rechnungen, um die Gleichung einer Ebene zu erhalten, bleiben unverändert, wenn auch schiefwinklige Achsen angenommen werden; die Gleichung

einer Ebene in Bezug auf dergleichen Achsen ist demnach gleichfalls allemal vom ersten Grade, und umgekehrt, drückt die Gleichung des ersten Grades zwischen drei Veränderlichen allemal eine Ebene aus, wenn auch schiefwinklige Coordinatenachsen gelten.

§. 26. Mit Hülfe derselben Schlußweise lassen sich auch die Gleichungen der cylindrischen Flächen herleiten. Diese werden nämlich durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, die, während sie über die Richtungslinie M=0, N=0 hingleitet, beständig einer gegebenen Richtung parallel bleibt. Die Gleichungen der Erzeugungslinie werden hiernach sein:

$$x=az+\alpha, \; y=bz+\beta \; . \; . \; . \; (1),$$

wobei a, b constante, α, β aber variable Größen darstellen, welche von der jedesmaligen Lage dieser Linie abhängig sind. Damit sie die Leitlinie treffe, müssen unsere vier obigen Gleichungen gleichzeitig stattfinden; eliminirt man nun x, y und z aus denselben, so kommt man auf die Endgleichung von der Form $\beta=F\alpha$, welche durch die den Constanten α, β beigelegten Werthe befriedigt werden muß. Indem man nun $F\alpha$ statt β in die zwei Gleichungen (1) substituirt, werden dieselben einer beliebigen Erzeugungslinie angehören, deren Lage durch den Werth von α bedingt ist; die Elimination von α aus diesen beiden Gleichungen liefert dann eine Relation zwischen x, y und z, welche für jede beliebige Erzeugungslinie gilt, mithin die Fläche darstellt, welche von der Erzeugungslinie während ihrer Bewegung beschrieben wurde.

Um also die Gleichung einer cylindrischen Fläche zu erhalten, müssen wir x, y, z zwischen den Gleichungen (1) und denen, welche die Richtungslinie charakterisiren, nämlich M=0, N=0 eliminiren; ferner in der daraus resultirenden Bedingungsgleichung $\beta=F\alpha$ das Binom x—az statt α und y—bz statt β setzen; für die Cylinderfläche erhalten wir auf diese Art folgende allgemeine Gleichung:

$$y-bz=F(x-az),$$

wobei die Function F durch die Natur der Richtungslinie bedingt wird.

Wir wollen nun unsere Methode auf einen Cylinder mit einer in der Ebene xy liegenden, kreisförmigen Basis anwenden. Die Gleichungen der Richtungslinie sind $y^2+x^2=2rx$, $z=0$, wenn der Ursprung

am Ende des Durchmessers AB (Fig. 13), der als Achse der x gilt, angenommen wird. Durch Elimination von x, y und z zwischen diesen letztern und den Gleichungen (1) entsteht die Bedingungsgleichung $\beta^2+\alpha^2=2r\alpha$; woraus man für den schiefen Cylinder mit kreisförmiger Basis folgende Gleichung erhält:

$$(y-bz)^2+(x-az)^2=2r(x-az).$$

Die Richtung der Achse wird durch die Werthe von a und b bestimmt.

Liegt diese Achse in der Ebene xz, so hat man $b=0$ und die Gleichung des Cylinders wird

$$y^2+(x-az)^2=2r(x-az).$$

Ist $a=b=0$, so wird die Achse des Cylinders auch noch der Achse der z parallel, und man hat

$$y^2+x^2=2rx.$$

Läßt man $z=0$ und $(x-x')^2+(y-y')^2=r^2$ als Gleichungen der Leitlinie gelten, wo x', y' die Coordinaten des Mittelpunktes des Kreises sind; so bekommt man für die Gleichung des Cylinders:

$$(y-bz-y')^2+(x-az-x')^2=r^2.$$

Für $x'=y'=0$ geht die Achse des Cylinders durch den Ursprung.

Anmerkungen. 1. Die Zeichen Fx, fx, φx dienen bekanntlich dazu, verschiedene Functionen von x darzustellen; sie zeigen Formeln an, in welchen die nämliche Größe x vorkommt, jedoch auf verschiedene Arten mit den gegebenen Größen combinirt. Dagegen drücken fx, fz einerlei Function von zwei verschiedenen Größen x und z aus, so daß, wenn in der letztern z mit x vertauscht wäre, man die erstere genau wieder erhielte. $f(\sqrt{z}+a)$, $f\left(\frac{a}{b+\log z}\right)$ deuten demnach an, daß, wenn man $\sqrt{z}+a=x$ und $\frac{a}{b+\log z}=x$ setzte, diese Functionen identisch und gleich fx würden

2. Die Gleichung der Ebene ließe sich auch dadurch herleiten, daß man solche als einen Cylinder mit gerader Grundlinie betrachtete.

3. Ist $z=0$, $Ay^2+Byx+Cx^2+Dy+Ex+F=0$ die Gleichung der Leitlinie; so bekommt man für die Gleichung des Cylinders:

$$A(y-bz)^2+B(x-az)(y-bz)+C(x-az)^2$$
$$+D(y-bz)+E(x-az)+F=0.$$

4. Man kann sich eine Cylinderfläche auch dadurch erzeugt denken, daß man die Curve, welche vorhin als Leitlinie galt, einer gegebenen Geraden, die früher die Richtung der Erzeugungslinie bestimmte, entlang, und zu sich selbst parallel fortbewegen läßt. Hiernach entsteht der schiefe Cylinder mit kreisförmiger Basis, indem sich dieselbe parallel zu sich selbst fortbewegt, so daß der Mittelpunkt des beweglichen Kreises fortwährend auf der Achse des Cylinders bleibt. Es seien z. B. $x=az$, $y=bz$ die Gleichungen dieser Achse, und $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$, $z=\gamma$ die des Kreises in irgend einer seiner Lagen. Man hat hier $\alpha=a\gamma$, $\beta=b\gamma$; woraus sich für die Gleichung des Cylinders wie oben, ergibt:

$$(x-az)^2+(y-bz)^2=r^2.$$

§. 27. Die konischen Flächen werden durch die Bewegung einer Geraden erzeugt, welche, bei ihrem Hingleiten über die Richtungslinie

$$M=0,\ N=0\ (1)$$

fortwährend durch einen festen Punkt (a, b, c), den sogenannten Scheitel, geht. Die Gleichungen der Erzeugungslinie sind hiernach

$$x-a=\alpha(z-c),\ y-b=\beta(z-c),\ (2)$$

wo α, β, für dieselbe erzeugende Linie constant, für verschiedene Lagen dieser Linie aber veränderlich sind. Indem wir x, y und z aus den vier obigen Gleichungen eliminiren, erhalten wir die Bedingungsgleichung $\beta=F\alpha$, aus welcher letztern durch die Elimination der Größen α und β, für die conischen Flächen folgende allgemeine Gleichung entspringt:

$$\frac{y-b}{z-c}=F\left(\frac{x-a}{z-c}\right).$$

Die von der Natur der Leitlinie abhängige Form der Funktion F ergibt sich durch die Rechnung sehr leicht.

Es diene z. B. als Leitlinie der Kreis AE (Fig. 14); dessen Gleichungen sind: $z=0$, $x^2+y^2=2rx$, wobei der Ursprung am Ende des mit der Achse der x zusammenfallenden Durchmessers liegt. Die Bedingungsgleichung $\beta=F\alpha$ ist hier

$$(a-\alpha c)^2+(b-\beta c)^2=2r(a-\alpha c),$$

woraus durch Elimination von α und β, für den schiefen Kegel mit kreisförmiger Basis folgende Gleichung entsteht:

$$(az-cx)^2+(bz-cy)^2=2r(z-c)(az-cx);$$

der Scheitel S des Kegels liegt im Punkt (a, b, c). Will man, daß die Achse SC sich in der Ebene xz befinde, wie man es in der Figur (14) sieht; so setze man $b=0$, und man erhält:

$$c^2(x^2+y^2)+2c(r-a)xz-a(a-2r)z^2+2acrz-2c^2rx=0).$$

Soll der Kegel ein gerader werden, so mache man $a=r$. In diesem Falle ist es jedoch bequemer, die Achse des Kegels für die Achse der z gelten zu lassen; man erhält alsdann für eine solche Kegelfläche:

$$c^2(x^2+y^2)=r^2(z-c)^2 \text{ oder } x^2+y^2=m^2(z-c)^2,$$

wo m die Tangente des Winkels bezeichnet, den jede Erzeugungslinie mit der Achse bildet, mithin $mc=r$ ist.

Liegt der als Basis dienende Kreis nicht in der Ebene xy, sondern in einer gegen die letztere geneigten und auf der Ebene xz senkrechten Ebene; so müssen, wenn A die Tangente des Neigungswinkels der Basis gegen die Ebene xy ist, die Gleichungen (1) durch $z=Ax$ und $x^2+y^2+z^2=r^2$ ersetzt werden.

Anmerkungen. Ist die Leitlinie eine Curve vom zweiten Grade

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

so bekommt man für die Gleichung der entsprechenden Kegelfläche, wenn, wie oben, a, b, c die Coordinaten des Scheitels des Kegels sind:

$$A(bz-cy)^2+B(az-cx)(bz-cy)+C(az-cx)^2$$
$$+D(bz-cy)(z-c)+E(az-cx)(z-c)+F(z-c)^2=0.$$

2. Die Gleichung des schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis vom Radius r, welche, wie oben, in der Ebene der xy liegen mag, kann auch dadurch gefunden werden, daß man einen Kreis parallel zu der Ebene xy sich fortbewegen läßt, wobei sein Mittelpunkt stets in der Gerade bleibt, welche den Mittelpunkt der Basis mit dem Scheitel (a, b, c) verbindet, und zugleich sein Radius ϱ sich in dem Maße vermindert, als sein Mittelpunkt dem Scheitel des Kegels näher rückt.

Die Gleichungen der Achse des Kegels sind:

$$x-a=\frac{a}{c}(z-c),\ y-b=\frac{b}{c}(y-c)\ \ldots (1),$$

wenn der Mittelpunkt der Basis im Ursprunge liegt und a, b, c die Coordinaten des Scheitels sind.

Für eine Lage des beweglichen Kreises hat man:

$$z=\gamma,\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2\ \ldots (2),$$

wo α, β, γ die Coordinaten seines Mittelpunktes darstellen. Der Erzeugungsart gemäß ist

$$\frac{r^2}{\varrho^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}\ \ldots (3);\ \text{ferner}$$

$$\alpha-a=\frac{a}{c}(\gamma-c),\ \beta-b=\frac{b}{c}(\gamma-c)\ \ldots (4).$$

Durch diese Werthe verwandelt sich die Gleichung (2) in

$$\varrho^2=r^2\left(\frac{c-\gamma}{c^2}\right)^2.$$

Substituirt man diesen Werth, desgleichen die Werthe für α und β aus (4) in (2); so findet man für die Gleichung des schiefen Kegels, nachdem z statt γ gesetzt worden:

$$[\gamma(x-\alpha)+\alpha(z-\gamma)]^2+[\gamma(y-\beta)+\beta(z-\gamma)]^2=r^2(z-\gamma)^2.$$

§. 28. Eine Rotationsfläche kann man aus der Bewegung eines Kreises BDC (Fig. 15) entstanden denken, dessen Ebene senkrecht auf der Achse Az steht, während sein Mittelpunkt auf dieser Achse fortrückt und sein Halbmesser dergestalt zu- oder abnimmt, daß die Peripherie beständig irgend eine gegebene Curve CAB schneidet. Wir beschäftigen uns hier vorerst nur mit dem Falle, in welchem die Achse der Rotation mit der Achse der z zusammenfällt. Jeder zur

Ebene der xy parallel geführte Kreis wird dann durch ein System zweier Gleichungen ausgedrückt, wovon die eine seiner auf der Achse senkrechten Ebene, und die andere seinem projicirenden Cylinder angehört; sie sind mithin

$z=\beta$, $x^2+y^2=\alpha^2$ . . . (1), wobei $AI=\beta$ und der Radius $IC=\alpha$ gemacht worden. Damit unser Kreis die gegebene Leitlinie, die durch

$$M=0,\ N=0 \ . \ . \ . \ (2)$$

dargestellt wird, treffe, müssen wir x, y und z aus diesen vier Gleichungen eliminiren, was uns zu einem Resultate von der Form $\beta=F\alpha$ führt.

Indem wir $F\alpha$ statt β in (1) setzen, erhalten wir die Gleichung des erzeugenden Kreises in einer seiner Lagen, die von α abhängt; es bleibt daher nichts weiter übrig, als α zu eliminiren, wodurch wir die Gleichung der betreffenden Rotationsfläche bekommen. Um also überhaupt die Gleichung einer Rotationsfläche zu erhalten, eliminiren wir x, y und z aus den Gleichungen (1) und (2), setzen dann in der dadurch gewonnenen Finalgleichung $\beta=F\alpha$, z statt β und $\sqrt{(x^2+y^2)}$ statt α, wonach sich für die Rotationsfläche folgende Gleichung: $z=F(x^2+y^2)$ ergibt. Die Beschaffenheit der Funktion F hängt von der Natur der Richtungslinie ab, und wird durch die Rechnung selbst bestimmt. Die nachstehenden Beispiele werden dies hinlänglich erläutern.

I. Es sei die Leitlinie ein in der Ebene xz liegender Kreis, dessen Mittelpunkt sich im Ursprung befindet. Für die Gleichungen (2) hat man hiernach $y=0$, $x^2+z^2=r^2$, woraus die Bedingungsgleichung $\alpha^2+\beta^2=r^2$ entsteht, was übrigens von selbst einleuchtend ist.

Setzt man nun x^2+y^2 statt α^2, und z statt β, so erhält man $x^2+y^2+z^2=r^2$ für die Gleichung der Kugel.

II. Es diene als Richtungslinie eine in der Ebene xz liegende Parabel BAC (Fig. 15), deren Gleichungen $y=0$, $x^2=2pz$ sind. Daraus entspringt die Bedingungsgleichung $\alpha^2=2p\beta$, welche, wenn man für α^2 und β ihre Werthe substituirt, für die Gleichung des Rotationsparaboloids gibt:

$$x^2+y^2=2pz.$$

III. Die gegebene Leitlinie sei eine in der Ebene xz liegende Ellipse, deren große Achse 2A mit der Rotationsachse und deren Mittelpunkt

mit dem Ursprung zusammenfällt; ihre Gleichungen sind daher

$$y=0,\ A^2x^2+B^2z^2=A^2B^2.$$

Hieraus erhält man für die Gleichung der durch Rotation der Ellipse um ihre große Achse erzeugten Fläche oder des länglichen Rotationsellipsoids:

$$A^2(x^2+y^2)+B^2z^2=A^2B^2.$$

Um die Gleichung der durch Drehung der Ellipse um ihre kleine Achse entstandenen Fläche oder des abgeplatteten Rotationsellipsoids zu erhalten, darf man in der vorigen Gleichung nur A mit B vertauschen.

IV. Nimmt man für die Richtungslinie eine in der Ebene xz liegende Hyperbel, deren Mittelpunkt mit dem Ursprung, und deren Querachse mit der Rotationsachse zusammenfällt; so bekommt man für die Gleichung der durch Rotation der Hyperbel um ihre Querachse erzeugten Fläche, welche das Rotationshyperboloid mit zwei Mänteln (Flächenästen) genannt wird:

$$A^2(y^2+x^2)-B^2z^2=-A^2B^2.$$

Wählt man dagegen die conjugirte Achse zur Rotationsachse, so findet man für die durch Umdrehung der Hyperbel um diese Achse erzeugte Fläche, welche das Rotationshyperboloid mit einem Mantel (Flächenast) heißt, die Gleichung:

$$B^2(x^2+y^2)-A^2z^2=A^2B^2.$$

V. Wir wollen jetzt die Gleichung derjenigen Fläche suchen, welche durch die Umdrehung der Geraden

$$x=az+A,\ y=bz+B$$

um die Achse der z, erzeugt wird. Die Verbindung dieser beiden Gleichungen mit denen des Parallelkreises gibt die Bedingungsgleichung

$$(a\beta+A)^2+(b\beta+B)^2=\alpha^2.$$

Durch die Elimination von α und β finden wir für die gesuchte Fläche:

$$x^2+y^2=(a^2+b^2)z^2+2(Aa+Bb)z+A^2+B^2$$

eine Gleichung, welche offenbar einem Rotationshyperboloid mit einem Mantel angehört.

Schneidet indessen die erzeugende Gerade die Achse der z, so muß ihren beiden Gleichungen Genüge geschehen, wenn man darin $x=y=0$ und $z=c$ setzt. Daraus folgt $A=-ac$, $B=-bc$; wonach man für die Fläche findet:

$$(a^2+b^2)(z-c)^2=x^2+y^2,$$

eine Gleichung, welche einen geraden Kegel darstellt.

VI. Wir wollen mit der Anwendung unserer Methode auf die ringförmige Fläche (Wulst) schließen, welche durch eine um die Achse der z sich drehenden Kreislinie erzeugt wird, wobei die Achse nicht durch den Mittelpunkt des Kreises geht, aber doch in dessen Ebene liegt. Die Gleichungen der Erzeugungslinie sind hiernach

$$y=0, \quad (x-a)^2+z^2=r^2;$$

die des Parallelkreises $z=\beta$, $x^2+y^2=\alpha^2$.

Die Bedingungsgleichung ist

$$(\alpha-a)^2+\beta^2=r^2;$$

woraus durch Elimination von α und β für die ringförmige Fläche folgende Gleichung entsteht:

$$[\sqrt{(x^2+y^2)}-a]^2+z^2=r^2$$

Um die Gleichung einer Umdrehungsfläche, deren Achse eine beliebige Lage hat, zu erhalten, muß man entweder seine Zuflucht zu einer Transformation der Coordinaten nehmen, oder das Problem auf eine directe, der vorhergehenden ähnliche Weise behandeln.

Anmerkungen. 1. Um die allgemeine Gleichung der Rotationsfläche für diesen Fall zu bekommen, seien

$$x-a=A\,(z-c), \quad y-b=B\,(z-c)$$

die Gleichungen der durch einen bestimmten Punkt (a, b, c) in bekannter Richtung gehenden Geraden. Jeder Parallelkreis kann nun durch das System folgender zwei Gleichungen ausgedrückt werden:

$$Ax+By+z=\beta \ldots, (1) \text{ und}$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\alpha^2 \ldots, (2)$$

von denen die erste einer auf der Rotationsachse senkrecht stehenden Ebene (§. 36), die zweite einer Kugel, deren Mittelpunkt im Punkt (a, b, c) liegt und deren Halbmesser α ist, angehört.

Sind nun $M=0$, $N=0$ die Gleichungen der erzeugenden Curve, so müssen wir aus ihnen und aus den beiden vorhergehenden Gleichungen die Größen x, y und z eliminiren, was uns die Bedingungsgleichung $\beta=F\alpha$ gibt, wo die Form der Function wieder durch die Rechnung selbst bestimmt wird. Alsdann brauchen wir darin bloß noch für α und β die Werthe aus (1) und (2) zu substituiren, um für die Rotationsfläche folgende Gleichung zu haben:

$$z+Ax+By=F[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2].$$

2. Die Flächen theilt man, wie die Linien, in algebraische und transcendente ein, je nachdem die Gleichung $f(x, y, z)=0$ derselben, in Bezug auf rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinaten, algebraisch oder transcendent ist. Die algebraischen Flächen werden dann wieder eingetheilt in Flächen der ersten Ordnung, deren Gleichung vom ersten Grade ist, also die Form $Ax+By+Cz+D=0$ hat; in Flächen der zweiten Ordnung, deren Gleichung vom zweiten Grade ist, also die Form:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0$$

besitzt, in Flächen der 3ten, 4ten, ... nten Ordnung, deren Gleichungen von dem 3ten, 4ten, ... nten Grade sind.

Eliminiren wir x und y aus den Gleichungen der geraden Linie $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ und der Gleichung $f(x, y, z)=0$, welche einer Fläche vom nten Grade angehört; so ergibt sich eine Gleichung in z, die im Allgemeinen vom nten Grade ist. Eine gerade Linie kann daher eine Fläche vom nten Grade höchstens in n Punkten schneiden.

Aufgaben über die Ebene und gerade Linie.

§. 29. Die Probleme, welche man sich über die Flächen vorlegen kann, sind von zweierlei Art, wie die über die Linien in §. 67 der analytischen Geometrie der Ebene. Entweder handelt es sich darum, die Punkte anzugeben, welche gewisse Eigenschaften besitzen sollen, oder man hat zum Zweck, der Fläche diese oder jene Lage oder solche Dimensionen zu ertheilen, wodurch sie gegebenen Bedingungen genüge. Im ersten Falle sind x, y, z die Unbekannten, während es im zweiten darauf ankommt, einige Constanten der Gleichung auf passende

Weise zu bestimmen. In allen Fällen müssen aber die gegebenen Bedingungen auf eben so viele Gleichungen, als Unbekannte da sind, führen, widrigenfalls das Problem unbestimmt oder absurd sein würde. Diese allgemeine Betrachtungen mögen nun auf die Ebene und gerade Linie ihre Anwendung finden.

§. 30. Die Projectionen des Durchschnitts zweier durch die Gleichungen

$$z=Ax+By+C,\quad z=A'x+B'y+C'$$

dargestellten Flächen zu suchen.

Man erhält, wenn z eliminirt wird, für die Gleichung der Projection des Durchschnitts auf der Ebene xy:

$$(A-A')x+(B-B')y+C-C'=0.$$

Ebenso findet man durch Hinwegschaffen von x und y für die Projectionen unseres Durchschnitts auf den Ebenen yz und xz beziehungsweise die Gleichungen:

$$(A'-A)z+(AB'-A'B)y+AC'-A'C=0,$$

$$(B'-B)z+(A'B-AB')x+BC'-B'C=0.$$

Anmerkung. Sind die beiden Ebenen zu einander parallel, so existirt jene Durchschnittslinie nicht mehr. Den vorhergehenden Projectionsgleichungen kann alsdann durch keinen Werth der Größen x, y und z Genüge gethan werden, oder die Faktoren dieser Größen müssen jeder für sich gleich Null sein. Man hat daher, wenn die Ebenen parallel sind, $A=A'$, $B=B'$. Und in der That sind, wenn die letzten Gleichungen statt haben, die Grundschnitte der beiden Ebenen mit den Coordinatenebenen einander parallel.

§. 31. Eine Ebene durch einen, zwei oder drei gegebene Punkte zu legen. Die gesuchte Gleichung hat die Form $z=Ax+By+C$. Geht die Ebene durch den Punkt (x', y', z'), so ist

$$z'=Ax'+By'+C;\ (1)$$

hieraus entsteht für die durch den Punkt (x', y', z') gelegte Ebene die Gleichung:

$$z-z'=A(x-x')+B(y-y').$$

Die Aufgabe bleibt unbestimmt, wenn die Constanten A und B unbekannt oder wenigstens nicht durch zwei Gleichungen mit einander verbunden sind, aus denen sie sich herleiten lassen.

Soll die Ebene noch durch einen zweiten Punkt (x'', y'', z'') gehen, so hat man überdies

$$z''=Ax''+By''+C; \quad (2)$$

mithin ist nur noch eine Constante willkührlich, was uns gestattet, die Ebene durch einen dritten Punkt (x''', y''', z'''), zu führen, wonach steht:

$$Ax'''+By'''+C=z''' \quad (3)$$

Anmerkung. Vermittelst der drei Gleichungen (1), (2), (3) lassen sich die drei Unbekannten A, B, C leicht bestimmen, welche, wenn die drei gegebenen Punkte in einer geraden Linie liegen, sich unter der Form $\frac{0}{0}$ darbieten werden, zum Beweise, daß durch solche Punkte unzählig viele Ebenen möglich sind.

§. 32. Den Durchschnittspunkt zweier Geraden zu finden, von denen die eine durch die Gleichungen

$x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, und die zweite durch die Gleichungen $x=a'z+\alpha'$, $y=b'z+\beta'$ bestimmt ist.

Für den fraglichen Punkt müssen x, y und z den obigen vier Gleichungen zugleich Genüge leisten. Da ihre Zahl die der Unbekannten übersteigt, so erhält man, wenn man x, y und z eliminirt, zuletzt die Bedingungsgleichung

$$(\alpha-\alpha')\,(b-b')=(\beta-\beta')(a-a'),$$

welche erfüllt werden muß, falls die zwei Geraden einander schneiden. Wird jener Bedingungsgleichung durch die Constanten der gegebenen Gleichungen nicht Genüge gethan, so schneiden die Geraden sich nicht. Im Falle sie aber befriedigt wird, findet man für die Coordinaten des Durchschnittspunktes folgende Werthe:

$$z=\frac{\alpha-\alpha'}{a'-a}=\frac{\beta-\beta'}{b'-b},\ x=\frac{a'\alpha-a\alpha'}{a'-a},\ y=\frac{b'\beta-b\beta'}{b'-b}.$$

Anmerkung. Ist $a=a'$ und $b=b'$, so wird unserer obigen Bedingungsgleichung Genüge geschehen, welche Werthe α, α', β

und β' auch haben mögen, und doch schneiden die Geraden sich nicht, weil sie alsdann einander parallel sind.

§. 33. Die Bedingungen zu finden, unter welchen eine Gerade in einer Ebene liegt oder zu derselben parallel läuft. Es seien $z=Ax+By+C$ die Gleichung der Ebene, und $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ diejenigen der geraden Linie.

Durch Substitution der Werthe $az+\alpha$ und $bz+\beta$ für x und y in die erste der vorhergehenden Gleichungen erhält man:

$$z(Aa+Bb-1)+A\alpha+B\beta+C=0;$$

woraus man die Ordinate z bestimmen würde, wenn die Gerade und Ebene nur einen Punkt gemeinsam hätten. Soll aber die Gerade ganz in der Ebene liegen, so muß der letztern Gleichung Genüge gethan werden, was auch z sein mag; woraus folgende Bedingungen entspringen:

$$Aa+Bb=1,\quad A\alpha+B\beta+C=0.$$

Will man, daß die Gerade bloß zu der Ebene parallel laufe; so denke man sich durch den Ursprung eine Gerade und eine Ebene gelegt, welche beziehungsweise der gegebenen Geraden und der gegebenen Ebene parallel sind. Die Gleichungen jener Geraden und dieser Ebene sind bezüglich

$$x=az,\quad y=bz \text{ und } z=Ax+By.$$

Sind nun die gegebene Gerade und Ebene einander parallel, so fallen die durch den Ursprung gelegte Linie und Ebene zusammen, und man hat als gesuchte Bedingungsgleichung:

$$Aa+Bb-1=0.$$

Anmerkung. Die letztere Bedingung würde man auch erhalten, wenn man sagte, der Durchschnittspunkt der Ebene mit der Geraden liege unendlich weit entfernt. Für ihren Durchschnittspunkt haben wir aber

$$z=-\frac{A\alpha+B\beta+C}{Ba+Bb-1}.$$

Damit nun dieser Ausdruck unendlich werde, muß $Aa+Bb-1=0$ sein, wie oben.

§. 34. Soll die Gleichung einer Ebene gefunden werden, welche durch die Gerade $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ und durch einen gegebenen

Punkt (x', y', z') geht; so braucht man bloß die beiden Bedingungsgleichungen

$$Aa+Bb-1=0,\ A\alpha+B\beta+C=0$$

mit der Gleichung $\quad Ax'+By'+C=z'$

zu verbinden, um die Werthe der drei Constanten A, B, C herzuleiten.

Will man durch eine gegebene Gerade eine mit einer andern Geraden parallele Ebene legen, so darf man nur mit den zwei ersten der vorhergehenden drei Gleichungen die Gleichung

$$Aa'+Bb'-1=0$$

in Verbindung setzen, wobei die Constanten a' und b' der zweiten Geraden angehören.

§. 35. Die Bedingungen zu finden, unter denen eine Gerade und eine Ebene senkrecht aufeinander stehen. Da die Ebene, durch welche die Gerade auf die Coordinatenebene xy projicirt wird, senkrecht auf dieser letztern steht, zugleich aber sich senkrecht auf der gegebenen Ebene befindet; so steht die projicirende Ebene, da sie die zwei andern Ebenen zugleich unter einem rechten Winkel schneidet, auch senkrecht auf deren Durchschnitt, und umgekehrt; mithin steht dieser Grundschnitt auch senkrecht auf der Projection der gegebenen Ebene, welche in der letztern Ebene liegt; dasselbe gilt für die Grundschnitte und Projectionen auf den beiden andern Coordinatenebenen. Wir haben nun diese Bedingungen analytisch auszudrücken, indem wir die im Paragraphen 33 angewendeten Bezeichnungen beibehalten. Die Grundschnitte der gegebenen Ebene auf den Coordinatenebenen xz und yz sind beziehungsweise:

$$y=0,\ z=Ax+C \text{ oder } x=\frac{1}{A}z-\frac{C}{A}, \text{ und}$$

$$x=0,\ z=By+C \text{ oder } y=\frac{1}{B}z-\frac{C}{B}.$$

Da sie nun auf den ihnen entsprechenden Projectionen der Linie senkrecht sein sollen, so haben wir nach dem bekannten, in der analytischen Geometrie der Ebene bewiesenen Satze folgende zwei Bedingungsgleichungen:

$$A+a=0,\ B+b=0.$$

Zwei von den der Ebene oder Geraden angehörigen Constanten wären hiernach bestimmt; was die übrigen anlangt, so müssen sie gegeben oder aus anderen Bedingungen hergeleitet werden.

Anmerkung. Die eben erwähnten zwei Bedingungsgleichungen gelten nur so lange, als es sich um rechtwinklige Coordinaten handelt; für den Fall eines schiefwinkligen Achsensystems erhalten dieselben eine andere Gestalt.

§. 36. Will man die Gleichung der Ebene haben, welche durch einen gegebenen Punkt (x', y', z') geht, und auf einer gegebenen Geraden $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ senkrecht steht; so findet man

$$z-z'+a(x-x')+b(y-y')=0.$$

Ist dagegen die Gleichung der Ebene $z=Ax+By+C$ gegeben, und man sucht die der auf ihr senkrecht stehenden Geraden, welche durch den gegebenen Punkt (x, y', z') geht; so erhält man für die Gleichungen dieser Geraden:

$$x-x'+A(z-z')=0,\ y-y'+B(z-z')=0,$$

§. 37. Die Entfernung eines Punktes (x', y', z') von einer Ebene, deren Gleichung

$$z=Ax+By+C \quad (1)$$

ist, zu finden. Die Gleichungen der von dem gegebenen Punkte auf die Ebene gezogenen Senkrechten sind

$$x-x'=-A(z-z') \quad (2)$$
$$y-y'=-B(z-z') \quad (3).$$

Man gebe zuvörderst der Gleichung (1) eine solche Gestalt, daß sie die Binome, $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ enthalte: man schreibe sie deshalb folgendermaßen:

$$z-z'=A(x-x')+B(y-y')+L, \quad (4)$$

wo, der Kürze wegen, $L=C-z'+Ax'+By'$ gesetzt worden.

Man substituire darauf in (4) die aus (2) und (3) genommenen Werthe von $x-x'$ und $y-y'$. Hieraus entspringt:

$$z-z'=\frac{L}{1+A^2+B^2},\ y-y'=\frac{-BL}{1+A^2+B^2},\ x-x'=\frac{-AL}{1+A^2+B^2};$$

ferner für die gesuchte Entfernung

$$\delta=\sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]}=\frac{L}{\sqrt{[1+A^2+B^2]}}.$$

Anmerkungen. 1. Ist der gegebene Punkt zugleich der Ursprung, so erhält man für die Entfernung der Ebene vom Anfangspunkt der Coordinaten;

$$\delta = \frac{C}{\sqrt{[A^2+B^2+1]}},$$

wo die Wurzelgröße dasselbe Zeichen bekommt, welches C hat.

2. Liegt der Punkt (x', y', z') in der Ebene selbst, so müssen seine Coordinaten der Gleichung derselben genügen, und man hat $\delta=0$, wie es sein soll.

§. 38. Die Entfernung eines Punktes (x', y', z') von einer Geraden zu finden, deren Gleichungen $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ sind. Die durch den gegebenen Punkt senkrecht auf die Gerade gelegte Ebene hat zur Gleichung

$$a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0.$$

Durch Zusammenstellung dieser drei Gleichungen erhält man die Werthe der Coordinaten x', y', z' desjenigen Punktes, in welchem die Gerade von der Ebene getroffen wird; nämlich

$$x=\frac{aM}{1+a^2+b^2}+\alpha,\ y=\frac{bM}{1+a^2+b^2}+\beta,\ z=\frac{M}{1+a^2+b^2},$$

wo, der Kürze wegen,

$$M=a(x'-\alpha)+b(y'-\beta)+z'$$

gesetzt worden. Nun ist die Linie, welche den letztern Punkt mit dem gegebenen verbindet, die gesuchte Entfernung P; man erhält hiernach, wenn die für x, y, z gefundenen Werthe in der Formel

$$P^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

substituirt werden, für diesen Abstand:

$$P^2=(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+z'^2-\frac{M^2}{1+a^2+b^2}.$$

§. 39. Den Winkel A zu finden, welchen zwei Geraden mit einander machen. Durch den Ursprung denke man sich zwei den beiden Geraden beziehungsweise parallele gerade Linien gezogen; den Winkel dieser beiden letztern wird die gesuchte Neigung der beiden gegebenen

Geraden sein, dieselben mögen sich schneiden oder nicht. Die Gleichungen dieser Parallelen seien daher

$$x=az,\ y=bz\ \ldots (1)$$
$$x=a'z,\ y=b'z\ \ldots (2):$$

es kommt nun darauf an, den gesuchten Winkel A durch a, b, a', b', auszudrücken. Wir stellen uns deshalb eine Kugel vor, die den Ursprung zum Mittelpunkt hat und deren Halbmesser die Einheit ist, und bestimmen hierauf die Coordinaten des Durchschnitts unserer beiden Geraden mit der Kugelfläche, indem wir die Gleichungen dieser Linien mit jener der Kugel $x^2+y^2+z^2=1$ nach und nach verbinden. Es ergibt sich dadurch für die Coordinaten x, y, z des Durchschnitts der erstern Geraden mit der Kugelfläche:

$$z=\frac{1}{\sqrt{[1+a^2+b^2]}},\ x=\frac{a}{\sqrt{[1+a^2+b^2]}},\ y=\frac{b}{\sqrt{[1+a^2+b^2]}},$$

und für die Coordinaten x', y', z' des Durchschnitts der zweiten Geraden mit dieser Fläche:

$$z'=\frac{1}{\sqrt{[1+a'^2+b'^2]}},\ x'=\frac{a'}{\sqrt{[1+a'^2+b'^2]}},\ y'=\frac{b'}{\sqrt{[1+a'^2+b'^2]}}.$$

Der Abstand D der beiden gedachten Punkte wird durch die Formel

$$D^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2,$$

ausgedrückt, wobei man zu erwägen hat, daß

$$x'^2+y'^2+z'^2=1,\ x^2+y^2+z^2=1.$$

Wir haben nun ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Seiten 1, 1 und D sind, und in welchem der gesuchte Winkel A der letztern Seite gegenüber liegt; mithin nach einem bekannten Lehrsatze der Trigonometrie:

$$\cos A=1-\tfrac{1}{2}D^2=xx'+yy'+zz', \text{ oder}$$
$$\cos A=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{[1+a^2+b^2]}\ \sqrt{[1+a'^2+b'^2]}}.$$

Wenn die beiden Geraden aufeinander senkrecht sein sollen, muß $\cos A=0$, mithin $1+aa'+bb'=0$ werden.

Will man, daß unsere Geraden parallel laufen, so muß $\cos A=1$ werden, was uns folgende Gleichung liefert:

$$(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-a'b)^2=0.$$

Diese ist aber nur dann möglich, wenn $a=a'$ und $b=b'$ wird, was mit dem in §. 24 Gefundenen vollkommen übereinstimmt.

§. 40. Die Winkel X, Y, Z zu finden, welche eine gegebene Gerade mit den rechtwinkligen Achsen der x, y und z bildet.

Da die gegebene Linie den Achsen nicht begegnen kann, so versteht man unter diesen Winkeln, wie oben, diejenigen, welche eine durch den Ursprung parallel mit der gegebenen Geraden gezogene Linie mit den Achsen macht.

1. Um vermittelst der im vorigen Paragraphen gefundenen Formel zu diesen Winkeln zu gelangen, haben wir nur nöthig, die zweite Gerade mit jeder der Achsen nach und nach zusammenfallen zu lassen, wobei die dann entsprechenden Werthe von a' und b' einzuführen sind. So drücken z. B. $x=0$, $y=0$ die Gleichungen der Achse der z aus. Damit nun die Gleichungen (2) in die eben erwähnten übergehen, müssen wir $a'=b'=0$ setzen. Eine solche Voraussetzung liefert uns die Formel:

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{[1+a^2+b^2]}}.$$

Lassen wir hierauf gedachte zweite Gerade sich um den Ursprung drehen, bis sie in die Ebene xz kommt; so wird der Winkel, dessen Tangente b' ist, fortwährend abnehmen und zuletzt verschwinden; mithin müssen wir $b'=0$ in unserm Ausdruck für $\cos A$ setzen, insofern wir den Winkel haben wollen, welchen eine im Raume befindliche Gerade mit einer andern in der Ebene xz bildet; der Zähler jenes Ausdrucks reducirt sich dadurch auf $1+aa'$ und die zweite Wurzelgröße des Nenners auf $\sqrt{[1+a'^2]}$. Rückt nun die zweite Gerade der Achse der x näher, so wächst a' und wird zuletzt unendlich, wenn sie mit derselben zusammenfällt. Die Einheit verschwindet alsdann gegen aa' und a'^2, wodurch der Zähler in aa' und die zweite Wurzelgröße in $\sqrt{[a'^2]}$ oder a' übergeht. Auf diese Art erhalten wir für den Winkel X, den eine Gerade im Raume mit der Achse der x macht, den Ausdruck:

$$\cos X = \frac{a}{\sqrt{[1+a^2+b^2]}}.$$

Eben so werden wir für die Achse der y, in Bezug auf welche $a'=0$ und $b'=\infty$ ist, finden:

$$\cos Y = \frac{b}{\sqrt{[1+a^2+b^2]}}$$

2. Die Wurzelgröße $\sqrt{[1+a^2+b^2]}$ positiv genommen bezieht sich jederzeit auf das Stück der Geraden, das oberhalb der Ebene xy liegt, oder einen spitzen Winkel mit der Achse der z macht. Die Winkel X und Y werden dabei spitz oder stumpf sein, je nachdem die Vorzeichen von a und b beschaffen sind.

3. Die gefundenen Werthe von $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ stellen zugleich die Sinus derjenigen Winkel dar, welche die Gerade mit der Ebene der yz, xz und xy bildet, indem diese Winkel offenbar die Complemente von X, Y und Z sind.

4. Werden die vorstehenden Cosinusgleichungen quadrirt und dann addirt, so entsteht:

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1,$$

woraus hervorgeht, daß jeder von den drei Winkeln, welche eine und dieselbe Gerade mit den Achsen bildet, durch die beiden andern bestimmt ist.

5. Der Winkel zweier Geraden läßt sich auch durch die Winkel darstellen, welche jede dieser Geraden mit den Achsen macht. Es ist deshalb nur nöthig, für

$$\frac{a}{\sqrt{[1+a^2+b^2]}}, \quad \frac{a'}{\sqrt{[1+a'^2+b'^2]}}$$

u. s. w. ihre Werthe $\cos X$, $\cos X'$, ... in den Ausdruck von $\cos A$ zu substituiren, wobei X', Y', Z', die Winkel der zweiten Geraden mit den Achsen bezeichnen. Wir finden so

$$\cos A = \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z'.$$

6. Aus den in No. 1 aufgestellten Formeln folgt

$$a = \frac{\cos X}{\cos Z} \text{ und } b = \frac{\cos Y}{\cos Z}.$$

Hierdurch erhalten die Gleichungen der Geraden im Raum folgende Form:

$$x = \frac{\cos X}{\cos Z} z + \alpha, \quad y = \frac{\cos Y}{\cos Z} z + \beta.$$

Anmerkung. Um die in Nr. 1 angewendete Schlußfolge zu verallgemeinern, sei der Bruch $\frac{Ax^a + Bx^b \ldots}{Mx^m + Nx^n \ldots}$, der sich auch folgendermaßen schreiben läßt: $\frac{x^a(A + Bx^{b-a} \ldots)}{x^m(M + Nx^{n-m} \ldots)}$.

Die Glieder werden sowohl im Zähler als im Nenner nach steigenden Potenzen von x geordnet angenommen, mithin sind a und m bezüglich die kleinsten Exponenten derselben.

Es bieten sich drei Fälle dar:

Erster Fall. Für $m=a$ heben sich die Factoren x^a, x^m gegenseitig auf, und der Bruch nähert sich, in dem Maße als x kleiner wird, immer mehr und mehr der Grenze $\frac{A}{M}$, welche er für $x=0$ erreicht.

Zweiter Fall. Für $m>a$ hat man den Ausdruck $\frac{A + Bx^{b-a} + \ldots}{x^{m-a}(M + Nx^{n-m} \ldots)}$, dessen Grenze offenbar das Unendliche ist; der fragliche Bruch wächst also über jede angebliche Größe hinaus, wenn x abnimmt.

Dritter Fall. Für $m<a$ ist Null die Grenze; d. h. der Bruch nähert sich ohne Ende der Null, in dem Maße als x kleiner wird.

Wenn man auf solche Weise zur Grenze schreitet, so sagt man, man macht x unendlich klein.

Werden dagegen die beiden Glieder des Bruches nach fallenden Potenzen von x geordnet angenommen, sind mithin a und m die höchsten Exponenten von x; so bringe man den Bruch auf folgende Form: $\frac{x^a\left(A + \frac{B}{x^{a-b}} \ldots\right)}{x^m\left(M + \frac{N}{x^{m-n}} \ldots\right)}$

Je größer nun x wird, desto mehr nähern sich die Glieder $\frac{B}{x^{a-b}}$, $\frac{N}{x^{m-n}} \ldots$ der Null, welche dem unendlichen x entspricht. Für $a=m$ ist diese Grenze $\frac{A}{M}$. Für $a>m$ wird der Bruch $\frac{x^{a-m}(A + \ldots)}{M + \ldots)}$, der mit x über jede angebliche Größe

hinaus wachsen kann. Für $a<m$ ist Null die Grenze. Diese Operation wird dadurch angezeigt, daß man sagt, man mache x unendlich groß.

Da unter vorliegenden Umständen nur das erste Glied des Zählers und Nenners in Betracht genommen wurde, so sieht man bald ein, daß man den Bruch zuvor auf $\frac{Ax^a}{Mx^m}$ hätte reduciren können. Weil sich dasselbe nun von jeder algebraischen Function behaupten läßt, so folgern wir daraus, daß, um x in einer Funktion unendlich groß zu machen, man nur die Glieder, in welchen dieser Buchstaben mit dem höchsten Exponenten versehen ist, beizubehalten brauche; während man, um x unendlich klein zu machen, alle Glieder wegläßt, worin nicht die kleinsten Exponenten von x vorkommen.

So reducirt sich für $x=\infty$ der Ausdruck

$$\frac{a+\sqrt[3]{[x^3+bx^2+c]}}{m+\sqrt{[x^2+n]}} \text{ auf } \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{x^2}}=1.$$

§. 41 Den Winkel ϑ zweier Ebenen zu finden, welche durch die Gleichungen

$$z=Ax+By+C, \quad z=A'x+B'y+C'$$

gegeben sind. Zieht man vom Ursprung aus auf jene Ebenen zwei Senkrechten, so ist der Winkel dieser Linien gleich dem Supplementwinkel des Winkels der Ebenen.

Die Gleichungen jener Linien sind:

$x=az$, $y=bz$ mit den Bedingungen $A+a=0$, $B+b=0$,

$x=a'z$, $y=b'z$ mit den Bedingungen $A'+a'=0$, $B'+b'=0$.

Der Cosinus des Winkels der beiden Normalen oder der beiden Ebenen ist hiernach:

$$\cos\vartheta=\frac{1+AA'+BB'}{\sqrt{[1+A^2+B^2]}\sqrt{[1+A'^2+B'^2]}}.$$

1. Um die Winkel zu finden, welche eine Ebene mit der Coordinatenebenen bildet, ist es nur nöthig, die zweite Ebene mit einer dieser Ebenen zusammenfallen zu lassen. Damit z. B. unsere zweite Ebene in die Ebene der xz übergehe, deren Gleichung $y=0$ ist, muß man $A'=C'=0$ und $B'=\infty$ setzen.

Hieraus erhält man für den Winkel T welchen die Ebene mit der Ebene xz bildet, die Formel:

$$\cos T = \frac{B}{\sqrt{[1+A^2+B^2]}}.$$

Auf ähnliche Weise findet man für die Winkel U und V, welche die Ebene mit den Coordinatenebenen yz und xy macht, die Ausdrücke:

$$\cos U = \frac{A}{\sqrt{[1+A^2+B^2]}},$$

$$\cos V = \frac{1}{\sqrt{[1+A^2+B^2]}}.$$

2. Nimmt man die Summe der Quadrate der drei letzten Gleichungen, so entsteht:

$$\cos^2 T + \cos^2 U + \cos^2 V = 1.$$

3. Substituirt man in der Gleichung für $\cos \vartheta$ die Werthe von A, A' . . . in $\cos T$, $\cos T'$ . . . ausgedrückt, wo T', U', V' dieselbe Bedeutung für die zweite Ebene, wie T, U, V für die erste haben; so erhält man:

$$\cos \vartheta = \cos T \cos T' + \cos U \cos U' + \cos V \cos U'.$$

4. Im Falle die beiden Ebenen senkrecht aufeinander stehen, ist

$$1 + AA' + BB' = 0,$$ oder

$$\cos T \cos T' + \cos U \cos U' + \cos V \cos V' = 0.$$

Anmerkungen. 1. Nennt man p den Abstand der Ebene $z = Ax + By + C$ vom Ursprung, so ist $p = \frac{C}{\sqrt{[A^2 + B^2 + 1]}}$. Mit Hülfe dieses Werthes und der in Nr. 1 angeführten Ausdrücke erhält die Gleichung der Ebene folgende Form:

$$z \cos V = x \cos U + y \cos T + p.$$

2. Ist F der Flächeninhalt irgend einer in der Ebene $z = Ax + By + C$ liegenden Figur, so haben wir, wenn die Projectionen derselben auf den Coordinatenebenen xz, yz und xy bezüglich durch f, f', f'' bezeichnet werden:

$$f = F \cos T, \quad f' = F \cos U, \quad f'' = F \cos V.$$

Werden diese Gleichungen quadrirt und addirt, so entsteht:

$$F^2 = f^2 + f'^2 + f''^2;$$

d. h. das Quadrat des Flächeninhalts jeder ebenen Figur ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf drei senkrecht untereinander stehenden Ebenen.

§. 42. Den Winkel q zu finden, welchen eine gegebene Gerade mit einer gegebenen Ebene bildet. Es seien: $z = Ax + By + C$ die Gleichung der Ebene, $x = az + \alpha$ und $y = bz + \beta$ die der Geraden. Man versteht unter jenem Winkel denjenigen, welchen gedachte Gerade mit ihrer Projection auf der Ebene macht, weil dieser Winkel der kleinste von allen ist, den die Gerade mit den verschiedenen, durch ihren Fußpunkt auf der Ebene geführten, Linien bildet, wie wir solches in der Stereometrie nachgewiesen haben. Fällen wir daher von einem Punkte unserer Geraden auf die Ebene eine Senkrechte, so wird der von den beiden letztern Geraden eingeschlossene Winkel das Complement des gesuchten Winkels η sein. Die Gleichungen der Senkrechten sind nun von der Form:

$$x = -Az + \alpha', \quad y = -Bz + \beta'.$$

Hiernach ergibt sich für den Winkel, den die Ebene mit der Geraden bildet:

$$\sin \eta = \frac{1 - Aa - Bb}{\sqrt{[1 + a^2 + b^2]}\ \sqrt{[1 + A^2 + B^2]}}.$$

1. Leicht lassen sich hieraus die Winkel, welche die Gerade mit den Coordinatenebenen xz, yz und xy macht, ableiten, deren Sinus beziehungsweise sind:

$$\frac{b}{\sqrt{[1 + a^2 + b^2]}}, \quad \frac{a}{\sqrt{[1 + a^2 + b^2]}}, \quad \frac{1}{\sqrt{[1 + a^2 + b^2]}},$$

was mit dem im §. 40 Gefundenen vollkommen übereinstimmt.

2. Läuft die Gerade mit der Ebene parallel, so ist $\sin \eta = 0$; folglich $aA + Bb = 1$, eine Bedingung, welche wir schon im §. 33 erhalten haben.

Anmerkung. Anderweitige Aufgaben über dieses und die folgenden Kapitel findet man:

1. In der schon früher erwähnten Puissant'schen Sammlung verschiedener Aufgaben; aus dem Französischen übersetzt von Hahn. Berlin bei Fröhlich.

2. In der Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes, von L. J. Magnus. Berlin, Dunker und Humblot.

Von der Transformation der Coordinaten.

§. 43. Um den Ursprung in einen andern Punkt (α, β, γ) zu verlegen, ohne die Richtung der Achsen, die übrigens ganz beliebig sein mögen, zu ändern, muß man die Formeln

$x = x' + \alpha,\ y = y' + \beta,\ z = z' + \gamma,$ anwenden.

In diesen Gleichungen, wo die neuen Achsen den ursprünglichen parallel laufen, und welche durch eine ähnliche Schlußfolge wie ihre analoge in der analytischen Geometrie der Ebene hergeleitet werden, müssen, je nach der verschiedenen Lage des neuen Ursprungs, die Größen α, β, γ die gehörigen Werthe und Vorzeichen erhalten. Liegt derselbe z. B. in der Ebene xy, so ist $\gamma = 0$; während α und β Null sind, wenn er sich auf der Achse der z befindet.

§. 44. Wir wollen nun von einem System rechtwinkliger Achsen Ax, Ay, Az zu einem System schiefwinkliger Achsen Ax', Ay', Az', welche mit den vorigen einerlei Anfangspunkt besitzen, übergehen.

Es seien deshalb x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes im Raume, und x', y', z' die schiefwinkligen Coordinaten desselben Punktes.

Durch $(x'x), (x'y), (x'z)$ stellen wir die als bekannt anzusehenden Winkel dar, welche die Achse der x' bezüglich mit jener der x, y, z, bildet, und so für die übrigen. Projiciren wir nun die gebrochene Linie $x' + y' + z'$ einmal auf die Achse Ax, dann auf die Achse Ay, und endlich auf die Achse Az; so haben wir folgende Formeln:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos(x'x) + y' \cos(y'x) + z' \cos(z'x) \\ y &= x' \cos(x'y) + y' \cos(y'y) + z' \cos(z'y) \\ z &= x' \cos(x'z) + y' \cos(y'z) + z' \cos(z'z) \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

mit Hülfe deren die rechtwinkligen Coordinaten in schiefwinklige verwandelt werden.

Zu bemerken ist, daß von den neun in diesen Formeln vorkommenden Constanten eigentlich nur sechs willkührlich sind, indem zwischen den Winkeln, welchen eine Gerade Ax' mit den rechtwinkligen Achsen Ax, Ay, Az macht, eine Bedingungsgleichung statt hat, was

ebenso für die Geraden Ay' und Az' gilt, wonach mit den Formeln (A) stets folgende drei Bedingungsgleichungen verbunden werden müssen:

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2(x'x)+\cos^2(x'y)+\cos^2(x'z)=1\\ \cos^2(y'x)+\cos^2(y'y)+\cos^2(y'z)=1\\ \cos^2(z'x)+\cos^2(z'y)+\cos^2(z'z)=1\end{array}\right\}\ (B).$$

Für die Winkel, welche die neuen Achsen mit einander bilden, hat man:

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x'y')=S=\cos(x'x)\cos(y'x)+\cos(x'y)\cos(y'y)+\cos(x'z)\cos(y'z)\\ \cos(x'z')=T=\cos(x'x)\cos(z'x)+\cos(x'y)\cos(z'y)+\cos(x'z)\cos(z'z)\\ \cos(y'z)=U=\cos(y'x)\cos(z'x)+\cos(y'y)\cos(z'y)+\cos(y'z)\cos(z'z)\end{array}\right\}\ (C).$$

§. 45. Will man von einem rechtwinkligen System zu einem andern, ebenfalls rechtwinkligen System, übergehen; so braucht man blos auszudrücken, daß die Achsen Ax', Ay', Az' senkrecht aufeinander stehen, was uns folgende Gleichungen liefert:

$$S=0,\ T=0,\ U=0.\quad (D)$$

Hieraus sieht man, daß beim Uebergange von einem rechtwinkligen Coordinatensystem zu einem andern, wieder rechtwinkligen die in den Transformationsformeln vorkommenden neun Constanten sich auf drei reduciren, welchen man willkührliche Werthe beilegen kann.

Die Achse der x' macht nämlich mit denen der x, y, z drei Winkel, von denen nur zwei willkührlich sind; dasselbe würde von der Achse der y' gelten, wenn sie nicht auf jener der x' senkrecht wäre: die letztere Bedingung läßt aber nur eine Constante übrig, über welche man nach Willkühr verfügen kann, was im Ganzen die Zahl unserer Constanten auf drei reducirt, indem mit diesen gegebenen Stücken die Lage der auf der Ebene $x'\,y'$ senkrecht stehenden Achse der z' zugleich bestimmt ist.

§. 46. Es hat nun nicht die geringste Schwierigkeit, die Entfernung δ zweier Punkte durch ihre schiefwinkligen Coordinaten α, β, γ, und α', β', γ' auszudrücken. Sind nämlich x, y, z, und x', y', z' die rechtwinkligen Coordinaten jener Punkte, so hat man:

$$\delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2.$$

Substituirt man hierauf für x, x', y, y', z, z' die Werthe in

$\alpha, \beta, \gamma, \alpha' \ldots$ aus (A) und nimmt dabei die Gleichungen (C) zu Hülfe; so entsteht:

$$\delta^2 = (\alpha-\alpha')^2 + (\beta-\beta')^2 + (\gamma-\gamma')^2 + 2(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')S$$
$$+ 2(\alpha-\alpha')(\gamma-\gamma')T + 2(\beta-\beta')(\gamma-\gamma')U,$$

wo S, T, U dieselbe Bedeutung wie in den Formeln (C) haben.

§. 47. Die beim Uebergange von einem rechtwinkligen zu einem andern, ebenfalls rechtwinkligen Systeme erforderlichen Formeln (A) werden für den Gebrauch bequemer, wenn man, wie Euler gethan, statt der neun darin vorkommenden Constanten, welche durch sechs Bedingungsgleichungen (B) und (D) unter sich verbunden sind, drei untereinander unabhängige Winkel einführt. Es sei deshalb AC (Fig. 16) der Grundschnitt der neuen Ebene $y'Ax'$ auf der Coordinatenebene xAy, gegen welche sie unter dem Winkel ϑ geneigt ist; ferner sei ψ der Winkel CAx, den jener Grundschnitt mit Ax macht. In der durch die Winkel ϑ und ψ bestimmten Ebene CAy' seien endlich die beiden rechtwinkligen Achsen Ax', Ay' gezogen, von denen die erstere mit dem Grundschnitte der bekannten Winkel $CAx' = \varphi$ bildet. Die neuen Achsen sind auf solche Weise durch die Winkel ϑ, ψ und φ bestimmt, indem mit der Richtung der in der Ebene x' y' liegenden Achse Ax' zugleich die Lage der auf derselben senkrechten Achse Ay' und die der auf Ax' und Ay' normalen dritten Achse Az' gegeben ist.

Zur Umwandlung der Coordinaten bleibt uns daher weiter nichts zu thun übrig, als die in den Gleichungen enthaltenen Constanten als Functionen von ϑ, ψ und φ auszudrücken. Zu diesem Behuf betrachten wir die durch die Geraden Ax, Ax' unf AC gebildete dreikantige Ecke, von der die beiden ebenen Winkel φ und ψ nebst dem Flächenwinkel ϑ bekannt sind. Die Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ verwandelt sich im vorliegenden Falle, wo

$c = (xx')$, $C = \vartheta$, $a = \psi$, $b = \varphi$, in:

$$\cos(xx') = \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \cos\vartheta. \quad (1)$$

Ebenso gibt uns die aus den Geraden AC, Ax, Ay' zusammengesetzte Ecke, für welche

$(y'x) = c$, $CAy' = 90^0 + \varphi = b$, $CAx = \psi = a$, $C = \vartheta$:

$$\cos(y'x) = -\cos\psi \sin\varphi + \sin\psi \cos\varphi \cos\vartheta. \quad (2)$$

Die dreikantige Ecke $x'ACy$, deren Winkel

$$(x'y)=c,\ CAy=90^0+\psi=a,\ CAx'=\varphi=b$$

sind, liefert desgleichen:

$$\cos(x'y)=-\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi\cos\vartheta. \quad (3)$$

Aus der dreikantigen Ecke $y'ACy$, wo

$CAy'=90^0+\varphi=a$, $CAy=90^0+\psi=b$, $(yy')=c$, erhalten wir;

$$\cos(yy')=\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi\cos\vartheta. \quad (4)$$

Betrachten wir die dreikantige Ecke $z'AxC$, in welcher die Achse Az' mit AC einen rechten Winkel macht, und auf der Ebene CAy' senkrecht steht, haben wir:

$$c=(z'x),\ C=90^0+\vartheta,\ a=90^0,\ b=\psi,$$

indem vorausgesetzt wird, daß die Ebene CAy' oberhalb der Ebene xy liege. Der erwähnten Fundamentalformel zufolge ist daher:

$$\cos(z'x)=-\sin\psi\sin\vartheta. \quad (5)$$

Die dreikantige Ecke $z'ACy$ gibt ebenso, indem $\psi+90$ statt ψ geschrieben wird:

$$\cos(z'y)=-\cos\psi\sin\vartheta. \quad (6)$$

Endlich ist $zAC=90^0$ und der Flächenwinkel $zACx'=90^0-\vartheta$; hiernach haben wir für die dreikantige Ecke $zACx'$:

$$\cos(x'z)=\sin\varphi\sin\vartheta. \quad (7)$$

Wird in dieser Gleichung $90^0+\varphi$ statt φ gesetzt, so entsteht für die dreikantige Ecke $zACy'$:

$$\cos(y'z)=\cos\varphi\sin\vartheta. \quad (8)$$

Ferner hat man

$$\cos(z'z)=\cos\vartheta. \quad (9)$$

In den vorstehenden neun Gleichungen haben wir somit unsere Constanten, welche in den Formeln (A) vorkommen, als Functionen der drei unabhängigen Winkel φ, ψ, ϑ ausgedrückt.

Die Bedingungsgleichungen (B) und (D) werden von selbst durch diese Werthe erfüllt, wie man sich leicht überzeugen kann.

Von den Polarcoordinaten.

§. 48. Analog mit dem, was wir über die Feststellung eines Punktes in der Ebene gesagt, kann auch die Lage eines Punktes im Raume (Fig. 17) durch folgende Bestimmungsstücke festgesetzt werden:

1. Durch den Radius vector $Am=u$, nämlich seine Entfernung von einem fixen Punkte A, dem Pole;

2. Durch den nicht 180^0 übersteigenden Winkel ψ, welchen dieser Leitstrahl mit dem positiven Theile der Achse Az macht;

3. Durch den Winkel $PAx=\varphi$, welchen die Projektion AP des Leitstrahls auf der Ebene yAx mit dem positiven Theile der Achse Ax bildet, und der sich von 0^0 bis 360^0 ändert.

Die Größen φ, ψ, u heißen die Polarcoordinaten des Punktes M.

Die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z des Punktes M lassen sich sehr leicht in Polarcoordinaten φ, ψ, u ausdrücken, wenn man den Anfangspunkt des rechtwinkligen Systems als Pol annimmt.

Man hat nämlich:

$$z=u\cos\psi;\quad x=AP\cos\varphi,\quad y=AP\sin\varphi,\quad AP=u\sin\psi.$$

Hieraus folgt:

$$z=u\cos\psi,\quad y=u\sin\varphi\sin\psi,\quad x=u\cos\varphi\sin\psi. \qquad (E)$$

Ist der Pol der Polarcoordinaten nicht zugleich der Anfangspunkt von x, y, z, sondern ein anderer Punkt, dessen Coordinaten in Bezug auf das rechtwinklige System a, b, c sind; so bestehen für die Verwandlung rechtwinkliger Coordinaten in polare die Gleichungen:

$$z=c+u\cos\psi,\quad y=b+u\sin\varphi\sin\psi,\quad x=a+u\cos\varphi\sin\psi.$$

§. 49. Sind α, β, γ die drei Winkel, welche der Radius vector mit den rechtwinkligen Achsen macht, wo γ mit ψ einerlei ist; so haben wir:

$$x=u\cos\alpha,\quad y=u\cos\beta,\quad z=u\cos\gamma. \qquad (F)$$

Aus der Zusammenstellung der Formeln (E) und (F) ergibt sich:

$$\cos\alpha=\cos\varphi\sin\psi,\quad \cos\beta=\sin\varphi\sin\psi,\quad \cos\gamma=\cos\psi.$$

Indem man diese Gleichungen quadrirt und addirt, erhält man die schon früher gefundene Relation:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Von den ebenen Durchschnitten.

§. 50. Schneiden sich zwei Flächen, so ist ihr Durchschnitt entweder eine einfach gekrümmte oder eine doppelt gekrümmte Curve. Unter Curve von einfacher Krümmung versteht man nämlich eine solche, deren Punkte sich sämmtlich in einer und derselben Ebene befinden; unter Curve von doppelter Krümmung dagegen diejenige, von der kein Theil in einerlei Ebene liegt. Von dieser Art ist z. B. der Durchschnitt eines geraden Cylinders und einer Kugel, wenn die Achse des Cylinders nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Im Fall, wo der Durchschnitt zweier Flächen sich als eine Curve von einfacher Krümmung herausstellt, ist es bequemer, um die Eigenschaften derselben kennen zu lernen, sie auf Coordinaten, welche in ihrer Ebene DOC (Fig. 18) liegen, zu beziehen. Es sei deshalb ϑ der Winkel, welchen gedachte Ebene mit der Coordinatenebene xy macht, und ψ der Winkel, den der Durchschnitt dieser Ebenen mit der Achse Ox einschließt. Als Achse der x' diene die erwähnte Durchschnittslinie OC und als Achse der y' die auf OC in der schneidenden Ebene DOC errichtete Senkrechte OA.

Da es darauf ankommt, die Gleichungen des Durchschnitts der Flächen in x', y', zu erhalten; so ist klar, daß man nichts weiter nöthig hat, als mit Hülfe der Transformationsformeln (A) die Gleichung einer unserer Flächen auf das System x', y', z' zu übertragen, und hierauf $z'=0$ zu setzen, was uns sofort ihren Durchschnitt mit der Ebene $x'Oy'$ gibt. In diesem einfachen Falle ist es jedoch gut, sogleich in den Formeln (A) $z'=0$ zu machen, und unmittelbar die Cosinus von (xx'), $(y'x)$ . . . zu suchen. Zu diesem Behufe betrachte man die dreikantige Ecke AOBC, in welcher die ebenen Winkel $a=\psi$, $b=90^0$ und der dazwischen liegende Flächenwinkel $C=\vartheta$ bekannt sind; wonach, der Fundamentalformel aus der sphärischen Trigonometrie gemäß, folgt:

$$\cos(y'x)=\sin\psi\cos\vartheta,\quad \cos(y'y)=-\cos\psi\cos\vartheta.$$

Außerdem ist

$$(x'x)=\psi,\ (x'y)=90^0-\psi,\ (x'z)=90^0.$$

Endlich hat man $(y'z)=90^0-\vartheta$, wobei die Ebene $x'Oy'$ ober-

halb der Coordinatenebene xy liegend vorausgesetzt wird. Die Gleichungen (A) verwandeln sich hiernach in:

$$\left.\begin{array}{l} x=x'\cos\psi+y'\sin\psi\cos\vartheta \\ y=x'\sin\psi-y'\cos\psi\cos\vartheta \\ z=y'\sin\vartheta \end{array}\right\} \quad (G).$$

Zu diesen Resultaten würde man auch gelangt sein, wenn man die im §. 47 aufgestellten Gleichungen benutzt hätte.

§. 51. Die vorstehenden Formeln mögen nun auf den schiefen Kegel mit kreisförmiger Basis ihre Anwendung finden. Die durch die Achse SC (Fig. 14) gelegte, auf der schneidenden Ebene AB senkrechte Ebene zAx sei die Coordinatenebene zx. Der Durchschnitt AB dieser beiden Ebenen oder die Achse der Curve trifft die letztere im Scheitel A, der als Anfangspunkt der Coordinaten gelten mag. Die zur Basis des Kegels parallel geführte Ebene xAy sei die Coordinatenebene xy; dieselbe wird den Kegel in einem Kreis AE, dessen Radius r ist und welchen man als Richtungslinie ansehen kann, schneiden. Unser Kegel, dessen Scheitelcoordinaten a, o, c sind, und dessen Achse in der Ebene xz und Basis auf der Ebene xy liegt, hat nach §. 27 zur Gleichung:

$$c^2(x^2+y^2)+2c(r-a)xz+a(a-2r)z^2+2acrz-2c^2rx=0.$$

Die auf der Coordinatenebene xz senkrechte Schnittebene AB schneidet die Ebene xy in der Achse Ay, mithin muß in den Formeln (G) $\psi=90^0$ gesetzt werden. Hieraus folgt:

$$x=y'\cos\vartheta,\ y=x',\ z=y'\sin\delta\ldots(1);$$

$$y'^2[c^2\cos^2\vartheta+2c(r-a)\sin\vartheta\cos\vartheta+(a^2-2ar)\sin^2\vartheta]$$
$$+c^2x'^2+2cry'(a\sin\vartheta-c\cos\vartheta)=0\ldots(2)$$

Die letzte Gleichung gehört der Curve an, welche übrigens alle Schnitte eines schiefen Kegels darstellen kann, wenn man a, c, r und ϑ sich ändern läßt; dabei werden die x' auf Ay und die y' auf AB gezählt. Es ist leicht, diese Gleichung zu discutiren, und daraus zu entnehmen, daß die durch dieselbe dargestellten Curven von einerlei Gattung mit denen des geraden Kegels sind.

Soll der Kegelschnitt in einen Kreis übergehen, so müssen die Coefficienten von x'^2 und y'^2 einander gleich sein, mithin

$$(c^2+2ar-a^2)\tang^2\vartheta=2c(r-a)\tang\vartheta.$$

Der Werth $\tang \vartheta = 0$ liefert die Basis AE des Kegels wieder. Was den zweiten Werth von $\tang \vartheta$ betrifft, so haben wir, um ihn näher zu erörtern:

$$\tang SAD = \frac{SD}{AD} = \frac{c}{a}, \quad \tang SAB = \frac{c - a \tang \vartheta}{a + c \tang \vartheta}.$$

Setzen wir für $\tang \vartheta$ den zweiten Werth, so kommt nach geschehener Reduction:

$$\tang SAB = \frac{c^3 + a^2 c}{2a^2 r - a^3 + 2c^2 r - ac^2} = \frac{c}{2r - a} = -\frac{SD}{DE},$$

oder $\tang SAB = -\tang SED = \tang SEA$.

Hieraus folgt, daß in einem schiefen Kegel von kreisförmiger Grundfläche die schneidende Ebene gleichfalls einen Kreis gibt, wenn die Winkel SAB, SEA, welche beziehungsweise die Linien AB und AE mit den größten und kleinsten Seitenlinien des Kegels bilden, einander gleich sind.

Leibnitz hat die schneidende Ebene yAB in ihrer gegenwärtigen Lage, wo sie ebenso, wie der parallele Schnitt, einen Kreis gibt, eine antiparallele genannt.

Um die Schnitte eines geraden Kegels zu erhalten, darf man blos $a = r$ in der Gleichung (2) setzen, wodurch sie in

$$y'^2(c^2 \cos^2 \vartheta - r^2 \sin^2 \vartheta) + c^2 x'^2 + 2cry'(r \sin \vartheta - c \cos \vartheta) = 0$$

übergeht, und mit der in der analytischen Geometrie der Ebene gefundenen übereinstimmt. Die Coefficienten von x'^2 und y'^2, einander gleich gesetzt, geben hier nur einen Werth für ϑ, und in der That fallen der parallele und antiparallele Schnitt jetzt zusammen.

§. 52. Der schiefe Cylinder, dessen kreisförmige Basis AB (Fig. 13) in der Ebene xy und Achse SC in der Ebene xz liegt, hat zur Gleichung:

$$y^2 + (x - az)^2 = 2r(x - az).$$

Indem die Werthe (1) eingeführt werden, wobei die schneidende Ebene senkrecht auf xz angenommen wird, kommt

$$y'^2(\cos^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta - 2a \sin \vartheta \cos \vartheta) + x'^2 = 2ry'(\cos \vartheta - a \sin \vartheta).$$

Der Schnitt ist eine Ellipse, die in einen Kreis übergeht wenn $\sin\vartheta=0$, oder $(a^2-1)\tang\vartheta=2a$, d. h. $\tang\vartheta=-\tang 2\alpha$; α bedeutet hier den Winkel, welchen die Achse des Cylinders mit der z bildet; folglich ist ϑ das Supplement von 2α.

Drittes Kapitel.

Von den Flächen der zweiten Ordnung.

Vom Mittelpunkt und den Diametralebenen der Flächen und von der Reduction der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades auf ihre einfachere Form.

§. 53. Ein Punkt A, welcher so liegt, daß sich auf jeder durch ihn gezogenen, von einer Fläche ein oder mehreremal abgeschnittenen geraden Linie, auf beiden Seiten gedachten Punktes eine gleiche Anzahl Abschnitte befindet, die je zwei einander gleich sind, heißt Mittelpunkt jener Fläche. Denkt man sich nun unsere Fläche auf drei beliebige Achsen, deren Anfangspunkt im Mittelpunkt A liegt, bezogen, und eine Sehne MAM′ durch A gelegt; so sieht man sehr bald ein, daß, wenn x', y', z', die Coordinaten des einen Durchschnittspunktes M der Sehne und der Fläche sind, $-x'$, $-y'$, $-z'$ die des andern M′ sein werden. Stellt daher $f(x, y, z)=0$ die algebraische Gleichung einer auf ihren Mittelpunkt als Ursprung bezogenen Fläche dar, so wird unsere Gleichung nicht geändert, wenn man die Zeichen der Variabeln x, y, z in die entgegengesetzten verwandelt. Der umgekehrte Satz hat ebenfalls statt.

Anmerkung. Ist $f(x, y, z)=0$ die auf den Mittelpunkt bezogene algebraische Gleichung einer Fläche, so kann die Bedingung, daß derselben gleichzeitig durch x, y, z und durch $-x$, $-y$, $-z$ Genüge geschehe, nur insofern erfüllt werden, als in derselben blos Glieder vorkommen, in denen die Summe der Exponenten der Variabeln gerade ist, wenn die

Gleichung vom geraden Grade ist, dagegen darf sie nur Glieder von ungerader Dimension enthalten, wenn ihr Grad ungerade ist. Um also zu erkennen, ob die durch $f(x, y, z)=0$ repräsentirte Fläche einen Mittelpunkt besitze, braucht man bloß in diese Gleichung $x=x'+a$, $y=y'+b$, $z=z'+c$ zu setzen. Lassen sich dann durch reelle Werthe von a, b, c die Coefficienten aller derjenigen Glieder, deren Dimension mit dem Grad der Gleichung nicht gleichzeitig gerad oder ungerad ist, wegschaffen; so bestimmen diese Coordinaten den Mittelpunkt der Fläche. Im Fall sich dies nicht bewerkstelligen läßt, besitzt die fragliche Fläche keinen Mittelpunkt.

§. 54. Die Ebene, welche ein System paralleler Sehnen einer Fläche halbirt, heißt eine Diametralebene dieser Fläche, und zwar die zur Richtung jener Sehnen conjugirte Diametralebene. Drei Diametralebenen werden unter sich conjugirt genannt, wenn jede die mit dem Durchschnitte der beiden andern Ebenen parallelen Sehnen halbirt. Steht die Diametralebene auf den von ihr halbirten Sehnen senkrecht, so heißt sie Hauptebene. Die Durchschnittslinien zweier Diametralebenen einer Fläche nennen wir Durchmesser der Fläche, während dieselben den Namen Achsen der Fläche erhalten, wenn die Diametralebenen zugleich Hauptebenen sind. Endlich heißen diejenigen Punkte, in welchen eine Fläche von einer ihrer Achsen getroffen wird, die Scheitel derselben.

Anmerkung. Bezieht man die Fläche, welche eine Diametralebene zuläßt, auf drei Achsen, von denen zwei, z. B. die der x und y, in der Diametralebene nach Willkühr genommen sind, die dritte aber, hier die der z, parallel zu den mit dieser Ebene conjugirten Sehnen ist; so wird die auf gedachtes Achsensystem Bezug habende algebraische Gleichung $f(x, y, z)=0$ unserer Fläche für z solche Werthe liefern, die je zwei gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind; d. h. ist die Ebene xy diametral und mit den zur Achse der z parallel geführten Sehnen conjugirt, so kann die Gleichung $f(x, y, z)=0$ nur gerade Potenzen von z enthalten. Der umgekehrte Satz ist ebenfalls richtig.

§. 55. Dies vorausgeschickt, gehen wir jetzt zu der allgemeinsten Gleichung über, welche man vom zweiten Grade zwischen drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bilden kann, und die von der Form ist:

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz=k \quad \ldots . \quad (1)$$

Um diese Gleichung zu discutiren, d. h. um die Natur und Lage der durch sie dargestellten Flächen zu bestimmen, wollen wir vorerst unsere Gleichung, mit Hülfe einer Umformung der Coordinaten, von den Gliedern in xy, yz, xz befreien, was, wie wir wissen, ihrer Allgemeinheit keinen Eintrag thut. Indem wir zu diesem Behufe die Formeln (A) benutzen, gehen wir von einem rechtwinkligen System zu einem schiefwinkligen über, wobei die neun darin vorkommenden Winkel den Bedingungsgleichungen (B) genügen müssen: es bleiben demnach drei Stücke völlig unbestimmt, wenn in der neuen Gleichung blos jene drei Glieder herausfallen sollen. Wollen wir aber, daß die neuen Achsen ebenfalls rechtwinklig zueinander stehen; so finden außerdem noch die drei Gleichungen (D) statt: es kommen mithin in der neuen Gleichung nur noch drei willkührliche Größen, über welche man verfügen kann, vor. Diese letztern werden aber bestimmt sein, wenn man die drei Coefficienten von yz, xz, xy gleich Null setzt. Um die hier nöthige Rechnung zu vereinfachen, schlagen wir folgenden Weg ein. Es seien $x=\alpha z$, $y=\beta z$ die Gleichungen der Achse der x'. Man hat, wenn der Kürze halber $l=\frac{1}{\sqrt{[1+\alpha^2+\beta^2]}}$ gesetzt wird:

$$\cos(x'x)=l\alpha, \quad \cos(x'y)=l\beta, \quad \cos(x'z)=l.$$

Ebenso erhält man, wenn $x=\alpha' z$, $y=\beta' z$ und $x=\alpha'' z$, $y=\beta'' z$ die Gleichungen der Achsen y' und z' sind:

$$\cos(y'x)=l'\alpha', \quad \cos(y'y)=l'\beta', \quad \cos(y'z)=l',$$
$$\cos(z'x)=l''\alpha'', \quad \cos(z'y)=l''\beta'', \quad \cos(z'z)=l'',$$

wo l', l'' ähnliche Bedeutungen, wie oben l, haben.

Die Formeln (A) verwandeln sich hiernach in:

$$x=l\alpha x'+l'\alpha' y'+l''\alpha'' z',$$
$$y=l\beta x'+l'\beta' y'+l''\beta'' z',$$
$$z=lx'+l'y'+l''z'.$$

Die sechs Unbekannten α, α', α'', β, β', β'' vertreten die

Stelle der in unserer Aufgabe vorkommenden neun Winkel, indem die Gleichungen (B) von selbst befriedigt werden. Substituiren wir nun diese Werthe von x, y, z in die allgemeine Gleichung (1) des zweiten Grades und setzen dabei die Coefficienten von $x'y'$, $x'z'$ und $y'z'$ gleich Null; so finden wir:

$$(a\alpha + d\beta + e)\alpha' + (d\alpha + b\beta + f)\beta' + e\alpha + f\beta + c = 0,$$
$$(a\alpha + d\beta + e)\alpha'' + (d\alpha + b\beta + f)\beta'' + e\alpha + f\beta + c = 0,$$
$$(a\alpha'' + d\beta'' + e)\alpha' + (d\alpha'' + b\beta'' + f)\beta' + e\alpha'' + f\beta'' + c = 0.$$

Es läßt sich jede dieser Gleichungen allein erhalten, ohne gerade die Substitution im Ganzen vorzunehmen; überdies ist es, wegen der Symmetrie der Rechnung hinreichend, eine dieser Gleichungen aufzusuchen, um die beiden andern daraus abzuleiten. Durch die Elimination von α' und β' aus der erstern Gleichung mit Hülfe der Gleichungen $x = \alpha' z$, $y = \beta' z$, welche der Achse der y' angehören, entsteht folgende, einer Ebene entsprechende Gleichung:

$$(a\alpha + d\beta + e)x + (d\alpha + b\beta + f)y + (e\alpha + f\beta + c)z = 0 \quad . \; . \; . \; (2)$$

Diese Gleichung drückt nun die erforderliche Bedingung aus, um das Glied in $x'y'$ wegzubringen; wenn blos auf diese Rücksicht genommen wird, kann man daher, wofern ihr Genüge geschieht, die Größen α, β, α', β' nach Belieben wählen. Damit also die transformirte Gleichung kein Glied in $x'y'$ mehr enthalte, brauchen wir nur die Achse der y' in jene Ebene, deren Gleichung so eben aufgestellt worden, zu verlegen.

Eliminiren wir auf ähnliche Art α'' und β'' aus der zweiten unserer drei Gleichungen vermittelst jener der Achse z' angehörigen Gleichungen $x = \alpha'' z$, $y = \beta'' z$, so bekommen wir ebenso die Ebene, in welcher die Achse der z' liegen muß, wenn in der transformirten Gleichung das Glied in $x'z'$ fehlen soll.

Nach der Form unserer beiden ersten Gleichungen ist es aber klar, daß die zweite Ebene mit der erstern einerlei ist; die transformirte Gleichung wird daher der Glieder in $x'y'$ und $x'z'$ entbehren und gedachte Ebene mit jener der $y'z'$ zusammenfallen, wenn wir darin die Achsen der y' und z' nach Belieben wählen. Da die Richtung dieser Achsen in unserer Ebene willkührlich ist, so gibt es eine unendliche Anzahl von Systemen, welche zu demselben Ziele führen; die Gleichung (2) gehört, wie man bald sieht, einer Ebene an, die zu

einer Diametralebene parallel läuft. Aus der letzten unserer drei Gleichungen wird man α' und β' kennen lernen, wenn noch gefordert würde, daß das Glied in $z'y'$ wegfalle. Hieraus erhellet sofort, daß es eine unendliche Anzahl von schiefwinkligen Achsen gibt, welche den drei vorgeschriebenen Bedingungen Genüge leisten.

§. 56. Nehmen wir aber an, daß die Coordinaten x', y', z' rechtwinklig zueinander sind, so muß die durch $x=\alpha z$, $y=\beta z$ dargestellte Achse der x' auf der Ebene $z'y'$, welche in (2) ihre Gleichung hat, senkrecht stehen.

Hieraus entspringen nach §. 35 folgende zwei Bedingungsgleichungen:

$$a\alpha+d\beta+e=(e\alpha+f\beta+c)\alpha \ldots (3),$$

$$d\alpha+b\beta+f=(e\alpha+f\beta+c)\beta \ldots (4).$$

Durch die Substitution des aus (4) genommenen Werthes von α in (3) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}&[(a-b)fe+(f^2-e^2)d]\beta^3\\&+[(a-b)(c-b)e+(2d^2-f^2-e^2)e+(2c-a-b)fd]\beta^2\\&+[(c-a)(c-b)d+(2e^2-f^2-d^2)d+(2b-a-c)fe]\beta\end{aligned}\right\}\ldots(5)$$
$$+(a-c)fd+(f^2-d^2)e=0.$$

Da diese Gleichung vom dritten Grad ist, so wird sie wenigstens eine reelle Wurzel für β zulassen, welcher ein reeller Werth von (α) in (4) entspricht; die Achse der x' wäre demnach in der Art bestimmt, daß sie senkrecht auf der Ebene $y'z'$ steht und in der transformirten Gleichung die Glieder in $x'y'$, und $x'z'$ zum Verschwinden bringt. Es bliebe daher nichts weiter übrig, als in dieser Ebene $y'z'$ die Achsen unter einen rechten Winkel so anzulegen, daß das Glied in $y'z'$ wegfalle. Es ist aber einleuchtend, daß man auf gleiche Weise eine Ebene $x'z'$ finden wird, dergestalt, daß die Achse der y' auf ihr senkrecht stehe und in der transformirten Gleichung die Glieder in $x'y'$, $z'y'$ nicht mehr vorkommen.

Nun trifft's sich aber, daß die Bedingungen, welche das Senkrechtsein der Achse der y' auf jener Ebene aussprechen, mit den Gleichungen (3) und (4) zusammenfallen; was nothwendigerweise zur Folge hat, daß die nämliche Gleichung vom dritten Grad auch β' liefern muß. Dasselbe gilt auch für die Achse der z'.

Die Gleichung (5) hat folglich ihre drei Wurzeln reell, welche die Werthe von β, β' und β'' abgeben; worauf die von α, α' und α'' aus (4) sich bestimmen lassen.

Es gibt also nur ein rechtwinkliges Achsensystem, in Bezug auf welches die Fläche der Glieder in $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$ entledigt ist, und zwar existirt ein solches für alle Fälle; mit Hülfe unserer Rechnung können diese Achsen, welche auch Hauptrichtungen der Fläche heißen, gefunden werden.

§. 57. Wir wollen nun zwei besondere Fälle, welche die Gleichung (5) darbieten kann, näher betrachten.

I. Es sei $(a-b)fe+(f^2-e^2)d=0$.

Es fehlt dann in der Gleichung (5) das erste Glied, und eine Wurzel von β wird, wie α, unendlich, indem sich die Gleichung (4) im vorliegenden Falle auf $e\alpha+f\beta=0$ reducirt: die entsprechenden Winkel sind also rechte, und eine der Achsen, z. B. die der x', liegt in der Ebene xy. Die Gleichung dieser Achse $ex+fy=0$ wird gefunden, wenn man aus der vorigen Gleichung α und β mit Hülfe der Gleichungen $x=\alpha z$, $y=\beta z$ eliminirt. Was die Richtungen der beiden andern Achsen anlangt, so ergeben sich dieselben aus der auf den zweiten Grad reducirten Gleichung (5).

II. Es seien die beiden ersten Coefficienten der Gleichung (5) gleich Null; mithin

$$(a-b)fe+(f^2-e^2)d=0, \text{ und}$$

$$(a-b)(c-b)e+(2d^2-f^2-e^2)e+(2c-a-b)fd=0.$$

Indem der Werth von b aus der erstern genommen und in die zweite substituirt wird, reducirt sich dieselbe auf den mit dem letzten Gliede der Gleichung (5) gleichlautenden Ausdruck:

$$(a-c)fd+(f^2-d^2)e=0.$$

Die in Frage stehende Bedingung wird hiernach durch die beiden Gleichungen

$$(a-c)fd+(f^2-d^2)e=0 \text{ und } (a-b)fe+(f^2-e^2)d=0$$

ausgesprochen. Nun läßt sich aber der Coefficient von β aus dem von β^2 dadurch ableiten, daß man b mit c und d mit e vertauscht,

was ebenfalls für das erste und letzte Glied der Gleichung (5) gilt: hieraus folgt, daß im vorliegenden Fall die Gleichung (5) identisch wird. Es gibt mithin in diesem Falle unendlich viele rechtwinklige Systeme, welche die Glieder in $x'y'$, $x'z'$ und $y'z'$ zum Verschwinden bringen.

Um diese verschiedenen Systeme noch näher kennen zu lernen, wollen wir a und b aus den Gleichungen (3) und (4) mittelst unserer beiden obigen Bedingungsgleichungen eliminiren.

Es entsteht dadurch:

$$(f\alpha-d)(ed\alpha+fd\beta+fe)=0,$$
$$(e\beta-d)(ed\alpha+fd\beta+fe)=0.$$

Diesen Gleichungen geschieht Genüge, wenn man $f\alpha-d=0$ und $e\beta-d=0$ setzt, wodurch eine Achse, deren Gleichungen $fx=dz$, $ey=dz$ sind, bestimmt wird. Für die beiden andern Achsen besteht die gemeinschaftliche Gleichung $ed\alpha+fd\beta+fe=0$. Dieselbe gibt, wenn man α und β mit Hülfe der Gleichungen $x=\alpha z$, $y=\beta z$ eliminirt, die Gleichung $edx+fdy+fez=0$, welche einer auf der schon bestimmten Achse senkrecht stehenden Ebene angehört. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der Fläche des zweiten Grades wird daher eine Curve vom zweiten Grad sein, welche unendlich viele rechtwinklige Achsensysteme hat, da in ihrer Gleichung das Rechteck der Coordinaten fehlt. Der Kreis ist aber die einzige Curve des zweiten Grades, welche diese Eigenschaft besitzt; folglich ist der Durchschnitt unserer Ebene mit der Fläche eine Kreislinie und die Fläche selbst eine Rotationsfläche, deren Drehachse $fx=dz$, $ey=dz$ zu Gleichungen hat.

Von den Flächen, welche einen Mittelpunkt haben.

§. 58. Die Gleichung (1) kann also, ihrer Allgemeinheit unbeschadet, immer auf die Form:

$$lz^2+my^2+nx^2+qx+q'y+q''z=k\ldots(6)$$

gebracht werden, wo x, y, z die neuen rechtwinkligen Coordinaten der Fläche sind. Wir wollen nun aus dieser letztern Gleichung (6) durch eine zweite Transformation der Coordinaten, bei welcher blos der Ursprung derselben, ohne ihre Lage zu ändern, verlegt wird, suchen, die ersten Potenzen der Veränderlichen wegzuschaffen. Setzen wir zu diesem Behufe in der Gleichung (6) statt x, y, z bezüglich

$x+a$, $y+b$, $z+c$, so haben wir, wenn die Glieder in x, y, z verschwinden sollen, die Bedingungsgleichungen:

$$a = -\frac{q}{2n},\ b = -\frac{q'}{2m},\ c = -\frac{q''}{2l}.$$

Unsere zweite Transformation ist also allemal möglich; oder es läßt sich die Gleichung (6) stets auf die einfachere Form:

$$lz^2 + my^2 + nx^2 = p \ . \ . \ . \ (7)$$

bringen, wenn keiner der Coefficienten von z^2, y^2, x^2 in (6) gleich Null ist. Dabei ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$p = k - lc^2 - mb^2 - na^2 - qa - q'b - q''c.$$

Die Gleichung (7) umfaßt eine erste Klasse der Flächen vom zweiten Grade. Dieselben haben offenbar einen Mittelpunkt, welcher zugleich der Ursprung der neuen Coordinaten ist; auch lassen sie drei unter sich conjugirte Hauptebenen zu, welche die rechtwinklichen Coordinatenebenen sind, auf welche sie nun bezogen werden. In der Gleichung (7) kann man den Faktor n stets positiv annehmen, und dann bleiben die verschiedenen Fälle zu unterscheiden, in denen m und l positiv, oder negativ oder mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sind.

§. 59. l und m sind positiv. Ist dabei p Null, so hat man gleichzeitig $x=y=z=0$; die Fläche reducirt sich demnach auf einen Punkt. Für p negativ hat die Gleichung (7) keine geometrische Bedeutung, stellt mithin eine imaginäre Fläche dar, weil die Summe von lauter positiven Größen nicht Null sein kann.

Ist p aber positiv, so erhält man, wenn in (7) nach einander $x=0$, $y=0$, $z=0$ gesetzt wird, die Gleichungen von Ellipsen, welche die Schnitte unserer Fläche mit den drei Coordinatenebenen sind. Die Durchschnitte der Fläche mit Ebenen, welche beziehungsweise zu den drei Coordinatenebenen parallel laufen, bilden gleichfalls Ellipsen, die immer kleiner werden, in dem Maße sie sich vom Ursprung entfernen, sich endlich auf einen Punkt reduciren und dann imaginär werden, so daß unsere Fläche nach allen Seiten hin begrenzt ist. Wegen dieser elliptischen Schnitte nennt man die Fläche Ellipsoid.

Für die Durchschnittspunkte A, A′, B, B′, C, C′ (Fig. 19) des Ellipsoids mit den Coordinatenachsen findet man beziehungsweise:

$$x = \pm\sqrt{\frac{p}{n}} = a,\ y = \pm\sqrt{\frac{p}{m}} = b,\ z = \pm\sqrt{\frac{p}{l}} = c^2.$$

Die Größen $AA' = 2a$, $BB' = 2b$, $CC' = 2c$ heißen die Achsen. Führt man diese Achsen in die Gleichung (7) ein, so erhält man für die Gleichung des Ellipsoid's:

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ oder } a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2.$$

Sind zwei von den drei Größen a, b, c einander gleich, so hat man ein Rotationsellipsoid, welches in eine Kugel übergeht, wenn $a = b = c$ wird.

Anmerkung. Das Ellipsoid wird von jeder durch die Achse der z gelegte Ebene in einer Ellipse geschnitten. Um nämlich die Gleichung des Schnitts in der schneidenden Ebene zu erhalten, brauchen wir nach den Formeln (G) in der Gleichung

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ blos}$$

$$x = x' \cos\psi,\ y = x' \sin\psi,\ z = y'$$

zu setzen, wo x', y' die in der schneidenden Ebene liegenden Coordinaten sind, und ψ den Winkel darstellt, welchen der positive Theil der Achse Ox' mit dem positiven Theil der Achse Ox macht.

Daraus ergibt sich für die Gleichung des Schnitts

$$\frac{y'^2}{c^2} + x'^2\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}\right) = 1,$$

welche einer Ellipse angehört. Dasselbe gilt auch für die durch die Achse der y oder x gelegten Schnittebenen.

§. 60. Der Coefficient l ist allein negativ. In diesem Falle hat man $-lz^2 + my^2 + nx^2 = p$. Die Coordinatenebenen yz und zx schneiden die Fläche in Hyperbeln, deren imaginäre Achse mit der Achse der z zusammenfällt. Aehnliche Resultate erhält man für alle mit yz und xz parallel geführten Ebenen. Dagegen ist der durch die Ebene yx entstandene Schnitt eine Ellipse ABB′A′ (Fig. 20). Die

mit xy parallel gelegten Schnitte sind ebenfalls Ellipsen, deren Dimensionen in dem Maße zunehmen, als sie vom Ursprung abstehen. Die Fläche, welche rings um die Achse der z hohl ist, unbegrenzt sich ausdehnt und aus einer einzigen ununterbrochenen Fläche besteht, heißt Hyperboloid mit einem Fache.

Für die Punkte, in welchen das Hyperboloid die Coordinatenachsen trifft, findet man

$$x=\pm\sqrt{\frac{p}{n}}=a,\ y=\pm\sqrt{\frac{p}{m}}=b,\ z=\pm\sqrt{\left(\frac{-p}{l}\right)}=c\sqrt{-1}.$$

Das Hyperboloid hat also vier reelle Scheitel A, A′, B und B′ und zwei imaginäre C und C′. Die Größen $2a$, $2b$ heißen die reellen Achsen, während $2c$ die imaginäre Achse genannt wird.

Führt man diese Achsen in die Gleichung des Hyperboloids ein, so bekommt man:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ist $a=b$, so hat man ein Rotationshyperboloid um die imaginäre Achse Oz.

Anmerkung. Jede durch die Achse der z gelegte Ebene schneidet das Hyperboloid in einer Curve, deren Gleichung ist:

$$\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi}{b^2}\right)x'^2-\frac{y'^2}{c^2}=1;$$

woraus folgt, daß die fragliche Curve eine Hyperbel ist.

§. 61. Wäre $p=0$, so hätte man $lz^2=my^2+nx^2$, welche Gleichung einen Kegel darstellt, dessen Scheitel im Anfangspunkt und dessen Achse in der Achse der z liegt, dessen Basis aber eine mit xy parallele Ellipse ist, deren Gleichungen sind:

$$z=\frac{1}{\sqrt{l}},\ my^2+nx^2=1$$

Dieser Kegel verhält sich asymptotisch zum Hyperboloid mit einem Fache. Denn sind z' und z die einerlei x und y entsprechenden Ordinaten des Kegels und Hyperboloids, so hat man:

$$\sqrt{l}\,(z'-z)=\sqrt{(my^2+nx^2)}-\sqrt{(my^2+nx^2-p)},$$

oder $$z'-z=\frac{\frac{p}{\sqrt{l}}}{\sqrt{(my^2+nx^2)}+\sqrt{(my^2+nx^2-p)}}.$$

Die Differenz $z'-z$ nimmt fortwährend ab, in dem Maße als x und y wachsen; gleichwohl bleibt stets $z<z'$.

§. 62. l und m sind beide negativ. Die Gleichung verwandelt sich alsdann in:

$$nx^2-lz^2-my^2=p.$$

Die Ebene xz schneidet die Fläche in einer Hyperbel DAD', EA'E' (Fig. 21); ein ähnliches Resultat liefert uns die Ebene xy. Ebenso geben zwei Systeme von Ebenen, welche beziehungsweise mit jenen beiden Coordinatenebenen parallel sind, Hyperbeln als Durchschnitte. Dagegen ist der Schnitt mit der Coordinatenebene yz imaginär. Legt man aber in dem Abstand α vom Ursprung O eine dieser Coordinatenebene parallele Ebene, so erhält man für die Curve, in welcher unsere Fläche von gedachter Ebene geschnitten wird:

$$lz^2+my^2=n\alpha^2-p.$$

Der in Frage stehende Schnitt ist also jederzeit eine Ellipse, wenn $n\alpha^2>p$; er ist aber imaginär für $n\alpha^2<p$, und ein Punkt für $n\alpha^2=p$. Unsere Fläche besteht daher aus zwei von einander getrennten, ins Unendliche sich erstreckenden Theilen. Wegen dieser Beschaffenheit heißt die Fläche **Hyperboloid mit zwei Fächern.**

Dies Hyperboloid schneidet die Coordinatenachsen in den Entfernungen:

$$x=\pm\sqrt{\frac{p}{n}}=a,\ y=\pm\sqrt{\frac{-p}{m}}=b\sqrt{-1},\ z=\pm\sqrt{\frac{-p}{l}}=c\sqrt{-1},$$

so daß also diese Fläche zwei reelle Scheitel A und A', und vier imaginäre B, B', C und C' hat.

Die drei Größen 2a, 2b, 2c heißen wieder die Achsen, obschon nur von der erstern die Endpunkte A, A' wirklich in der Fläche liegen. Führt man diese Achsen in die Gleichung des Hyperboloids ein, so entsteht:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Für $b=c$ verwandelt sich das Hyperboloid in ein Rotationshyperboloid, welches durch die Umdrehung der Hyperbel AD, A'E um ihre reelle Achse AA' erzeugt wird.

Anmerkung. Legt man jetzt durch die Achse der x, wie in den vorhergehenden Fällen durch die Achse der z, eine Ebene; so muß man, um die Gleichung des Schnitts des Hyperboloids mit dieser Ebene zu erhalten, in die Gleichung des erstern $x=y'$, $y=x'\cos\psi$, $z=x'\sin\psi$, setzen.

Dadurch entsteht

$$\frac{y'^2}{a^2}-\left(\frac{\cos^2\psi}{b^2}+\frac{\sin^2\psi}{c^2}\right)x'^2=1;$$

woraus folgt, daß der in Rede stehende Schnitt eine Hyperbel ist.

§. 63. Wäre $p=0$, so hätte man $nx^2-lz^2-my^2=0$, welche Gleichung einen Kegel darstellt, dessen Scheitel im Ursprung und Achse in der Achse der x liegt, dessen Basis jedoch eine mit yz parallele Ellipse ist. Dieser Kegel ist ebenfalls asymtotisch zu dem Hyperboloid mit zwei Fächern. Denn sind x und x' die zu denselben Werthen von y und z gehörigen Ordinaten des Hyperboloids und Kegels, so hat man:

$$\sqrt{n}(x-x')=\sqrt{(p+lz^2+my^2)}-\sqrt{(lz^2+my^2)}, \text{ oder}$$

$$x-x'=\frac{\frac{p}{\sqrt{n}}}{\sqrt{(p+lz^2+my^2)}+\sqrt{(lz^2+my^2)}}.$$

Die Differenz $x-x'$ wird desto kleiner, je größer z und y werden; oder beide Flächen nähern sich immer mehr, ohne sich je zu erreichen; gleichwohl bleibt stets $x>x'$.

§. 64. Die erste Klasse der Flächen des zweiten Grades hat, außer dem elliptischen Kegel, noch als Varietäten den elliptischen und hyperbolischen Cylinder. Ist nämlich in der Gleichung (6) $n=q=0$, ohne daß eins der beiden andern Quadrate der Variabeln fehlt; so reducirt sich diese Gleichung von selbst auf die Form:

$$lz^2+my^2+q'y+q''z=k,$$

welche einem auf der Ebene yz senkrecht stehenden Cylinder angehört, dessen Basis eine Ellipse oder Hyperbel ist.

Von den Flächen, welche keinen Mittelpunkt haben.

§. 65. Ist in der Gleichung (6) blos einer von den drei Coefficienten der Quadrate der Variabeln Null, z. B. $n=0$, der entsprechende Coefficient der ersten Potenz jener Variabeln es aber

nicht; so ist die Transformation, um die Glieder in x, y, z sämmtlich wegzuschaffen, nicht ausführbar. Im vorliegenden Falle hat die Gleichung (6) die Form:

$$lz^2 + my^2 + qx + q'y + q''z = k,$$

und es lassen sich, wenn man darin $x+a$, $y+b$, $z+c$ statt x, y, z setzt, die Glieder $q'y$ und $q''z$ nebst dem constanten Theil wegbringen, wonach sich die Gleichung in

$$lz^2 + my^2 = px \ . \ . \ . \ (8)$$

verwandelt, und die zweite Klasse der Flächen vom zweiten Grade umfaßt. Die Flächen dieser Klasse haben keinen Mittelpunkt, weil man nie das Glied px zum Verschwinden bringen kann. Die Gleichung (8) bietet nur zwei Hauptfälle dar, nämlich entweder haben l und m einerlei oder verschiedene Zeichen. Denn das Zeichen von p hat keinen Einfluß auf die Gestalt, sondern nur auf die Lage der Fläche gegen die Coordinatenachsen; weshalb wir es auch hier nur positiv annehmen.

I. Fall. l und m sind positiv. Die Coordinatenebenen xy, xz schneiden die Fläche in den Parabeln AOA' BOB' (Fig. (22), deren Gleichungen sind:

$$z=0, \ y^2 = \frac{p}{m}x; \ y=0, \ z^2 = \frac{p}{l}x.$$

Der Durchschnitt mit der Ebene yz ist der Ursprung der Coordinaten. Die mit dieser Coordinatenebene parallelen Schnitte erzeugen Ellipsen, die für wachsende positive x zunehmen, und für negative x imaginär ausfallen. Unsere Fläche, die elliptisches Paraboloid heißt, liegt daher ganz auf einer Seite der Ebene yz und erstreckt sich auf derselben ins Unendliche hin.

Sind l und m einander gleich, so hat man das Rotationsparaboloid, welches durch Umdrehung einer Parabel um die Achse der x entsteht.

Anmerkung. Um die Gleichung des Schnittes zu erhalten, welchen eine beliebige, durch die Achse der x gelegte Ebene gibt, muß man in der Gleichung (8) setzen:

$$x = x', \ y = -y' \cos\vartheta, \ z = y' \sin\vartheta.$$

Es entsteht dadurch, $px' = (l \sin^2 \vartheta + m \cos^2 \vartheta) y'^2$; woraus erhellet, daß alle diese Schnitte Parabeln sind.

II. Fall. m ist positiv und l negativ. Die Gleichung hat in diesem Falle die Form: $my^2 - lz^2 = px$. Die Durchschnitte der Fläche mit den Coordinatenebenen xy, xz, yz sind beziehungsweise:

$$y^2 = \frac{p}{m} x,\ z^2 = -\frac{p}{l} x,\ y = \pm z \sqrt{\frac{l}{m}}.$$

Die zwei erstern stellen die Parabeln AOA', BOB' (Fig. 23) dar, deren Aeste sich nach entgegengesetzten Richtungen erstrecken; die letzte liefert zwei im Ursprung sich schneidende Geraden. Alle mit xy und xz parallel geführten Schnitte sind Parabeln, die ebenfalls nach entgegengesetzten Richtungen ihre Aeste verbreiten. Die mit yz parallelen Schnitte geben Hyperbeln, deren Gleichungen sind:

$$x = \alpha,\ my^2 - lz^2 = \alpha p.$$

Diese Hyberbeln werden desto größer, je größer α wird; ihre Lage ändert sich aber mit dem Zeichen von α. Für ein positives $\alpha = OC$ bekommt man die Hyperbel DAD', $EA'E'$, deren reelle Achse AA' mit Oy und imaginäre Achse CG mit OZ parallel ist. Für ein negatives $\alpha = OC'$ dagegen erhält man die Hyperbel FBF', $HB'H'$, deren reelle Achse BB' mit Oz und imaginäre Achse $C'G'$ mit Oy parallel läuft. Unsere Fläche, welche **hyperbolisches Paraboloid** genannt wird, dehnt sich mithin auf beiden Seiten der Achse der x ins Unendliche aus. Wegen der Verschiedenheit der Zeichen von l und m läßt sich durch die Annahme von $l = m$ das hyperbolische Paraboloid in keine Rotationsfläche verwandeln.

Anmerkung. Die Gleichung der Curve, in welcher das hyperbolische Paraboloid durch eine beliebige durch die Achse der x gelegte Ebene geschnitten wird, ist:

$$(m \cos^2 \vartheta - l^2 \sin^2 \vartheta)\ y'^2 = px';$$

woraus folgt, daß dergleichen Schnitte alle Parabeln sind.

§. 66. Das elliptische Paraboloid $my^2 + lz^2 = px$ werde durch eine beliebige Ebene, deren Gleichung $x = \alpha y + \beta z + \gamma$ sein mag, geschnitten. Für die Projection der Durchschnittscurve auf der Ebene yz erhält man

$$my^2 + lz^2 - p(\alpha y + \beta z + \gamma) = 0.$$

Da diese Projection eine Ellipse ist, die Projection einer Hyperbel aber niemals eine geschlossene Curve sein kann; so folgt hieraus, daß das elliptische Paraboloid von keiner Ebene in einer Hyperbel geschnitten werden kann.

Man schneide ebenso das hyperbolische Paraboloid $my^2 - lz^2 = px$ durch eine beliebige Ebene $x = \alpha y + \beta z + \gamma$. Für die Projection der Durchschnittscurve findet man die Gleichung:

$$my^2 - lz^2 - p(\alpha y + \beta z + \gamma) = 0,$$

welche einer Hyperbel angehört. Weil nun die Projection einer Ellipse auf irgend einer Ebene jederzeit eine geschlossene Curve sein muß, mithin keine Hyperbel gibt; so kann das hyperbolische Paraboloid von einer Ebene nie in einer Ellipse geschnitten werden.

§. 67. Ist in der Gleichung (8) $p = 0$, so hat man $lz^2 + my^2 = 0$. Diese letztere stellt die Achse der x dar, wenn m und l mit gleichen Zeichen behaftet sind. Dagegen repräsentirt sie zwei in der Achse der x sich schneidende Ebenen, wenn jene Coefficienten verschiedene Vorzeichen haben.

Verschwinden in der Gleichung (6) zwei der Coefficienten von x^2, y^2, z^2, z. B. m und n, so läßt sich dieselbe auf die Form bringen:

$$lz^2 + q'y + qx = 0.$$

Die mit yz, zx parallelen Schnitte sind Parabeln, deren Scheitel in der Ebene yx und zwar in der geraden Linie $qx + q'y = 0$ liegen. Die mit xy parallelen Schnitte sind gerade Linien, welche zu einander parallel laufen. Die Fläche ist daher ein parabolischer Cylinder.

Gehen mit n und m zugleich q und q' weg, so läßt sich die Gleichung (6) auf die Form $lz^2 = p$ bringen. Sie repräsentirt dann zwei der Ebene xy parallele Ebenen, wenn l und p gleiche Zeichen haben; dagegen hat sie keine geometrische Bedeutung, wenn diese Coefficienten verschiedene Zeichen besitzen.

Sind endlich die drei Coefficienten l, m, n in der Gleichung (6) zugleich Null, so stellt sie bekanntlich eine Ebene dar.

Anmerkung. Hiermit schließt der Verfasser das sechste Buch, in welchem die Flächen des zweiten Grades etwas zu kurz abgehandelt zu sein scheinen. Der Uebersetzer glaubt daher wegen

Aufnahme anderweitiger hierher gehörigen Lehren keinen Tadel zu verdienen. Seine Absicht war dabei, den Leser, mit der Natur der fünf Flächengeschlechter der zweiten Ordnung genauer bekannt, und zugleich in dem schönen Gebiete der analytischen Geometrie im Raume heimischer zu machen.

Von den parallelen Schnitten in einer und derselben Fläche zweiten Grades überhaupt, und der Art, diese Flächen zu construiren.

§. 68. Die verschiedenen Schnitte, welche durch parallele Ebenen in einer und derselben Fläche zweiten Grades entstehen, sind ähnliche und ähnlich liegende Curven. Um dies nachzuweisen, combiniren wir die Gleichung:

$$lz^2 + my^2 + nx^2 = 1,$$

welche die Flächen der ersten Klasse repräsentirt, mit der einer beliebigen Ebene:

$$z = ax + by + \delta \quad . \; . \; . \; (1).$$

Durch Elimination von z ergibt sich die Projection der Durchschnittscurve auf der Ebene xy, nämlich:

$$(m + lb^2)y^2 + (n + la^2)x^2 + 2labxy + 2la\delta x + 2lb\delta y + l\delta^2 - 1 = 0 \ldots (2).$$

Um nun den Schnitt durch eine der erstern parallel geführten Ebene $z = ax + by + \delta'$ zu erhalten, braucht man bloß δ' statt δ in der Gleichung (2) zu setzen. Diese Verwechslung bringt aber in den von δ unabhängigen Gliedern vom zweiten Grade gar keine Aenderung hervor, woraus folgt, daß die Projectionen MN . . . und $M'N'$ (Fig. 24) der beiden parallelen Schnitte ähnliche und ähnlich liegende Curven sind. (Man vergleiche hiermit die 8te Note). Es sind dies aber auch dann die beiden zugehörigen Curven im Raume; denn denken wir uns durch die parallelen Leitstrahlen OM und $O'M'$, ON und $O'N'$ . . . senkrechte Ebenen gelegt, so schneiden diese die Ebenen beider Schnitte in Geraden om und $o'm'$, on und $o'n'$ . . . , welche je zwei zu einander parallel sind.

Die bekannte Relation zwischen unsern Geraden und ihren Projectionen gibt nun die Bedingungen:

$$OM = om \cos\alpha, \quad ON = on \cos\beta,$$

$$O'M' = o'm' \cos\alpha, \quad O'N' = o'n' \cos\beta \; . \; . \; .$$

Wegen der Aehnlichkeit der Curven MN... und M'N'..., besteht aber die Gleichheit der Verhältnisse:

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{ON}{O'N'} \ldots,$$

was die Gleichheit der Verhältnisse

$$\frac{om}{o'm'} = \frac{on}{o'n'} \ldots,$$

oder die Aehnlichkeit der im Raume liegenden Curven mn... und m'n' nach sich zieht.

Um den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller mit der Ebene (1) parallelen Schnitte zu erhalten, bemerken wir, daß der Mittelpunkt einer Curve im Raume sich immer im Mittelpunkt der Projection projicirt. Der Mittelpunkt der Curve ergibt sich aber aus folgenden zwei gleichzeitig bestehenden Gleichungen:

$$(m+lb^2)y+labx+lb\delta=0,$$
$$(n+la^2)x+laby+la\delta=0.$$

(Siehe die analytische Geometrie der Ebene, Seite 120.)

Eliminiren wir nun aus diesen beiden Gleichungen die in den einzelnen Schnitten verschiedene Constante δ vermittelst der Gleichung (1), so erhalten wir für den Ort sämmtlicher Mittelpunkte der Parallelschnitte:

$$nx+laz=0, \quad my+lbz=0.$$

Der Ort der Mittelpunkte aller Parallelschnitte bei den Flächen der ersten Klasse ist daher eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade.

§. 69. Für die Flächen der zweiten Klasse, welche in der Gleichung $lz^2+my^2-px=0$ begriffen sind, liefert eine beliebige Ebene:

$$x=by+cz+\delta \ldots (3),$$

einen Schnitt, dessen Projection auf der Ebene yz zur Gleichung hat:

$$lz^2+my^2-pby-pcz-p\delta=0 \ldots (4).$$

Die Variation von δ läßt hier die Glieder vom zweiten Grade ganz unverändert, was, wie oben, zur Folge hat, daß die parallelen Schnitte im Raume ähnlich und ähnlich liegend sind.

Der Mittelpunkt der Curve (4) ergibt sich aus den Gleichungen:

$$2lz-pc=0 \text{ und } 2my-pb=0.$$

Um nun den Ort aller Mittelpunkte zu erhalten, müßten wir die Veränderliche δ aus den beiden letzten Gleichungen vermittelst (3) eliminiren; es kommt aber gedachte Größe in diesen Gleichungen nicht mehr vor, mithin stellen sie bereits die gesuchte Mittelpunktslinie dar; d. h. dieselbe ist eine der Achse der x parallel laufende Gerade.

§. 70. Aus dem Vorhergehenden lassen sich nun verschiedene Erzeugungsarten für die Flächen des zweiten Grades herleiten.

1. Um das Ellipsoid zu construiren, denke man sich vorerst eine Ellipse $ACA'C'$ (Fig. 19) in der Ebene xz mit den Geraden $AA' = 2a$, und $CC' = 2c$ als Achsen gezogen; ferner denke man sich in einer auf der Geraden CC' senkrecht stehenden Ebene eine zweite Ellipse $DE'D'E$ gezeichnet, welche die Ordinate der ersten Ellipse $O'D = a'$ und die beliebige, jedoch auf $O'D$ senkrechte Gerade $O'E = b'$ zu Halbachsen hat; hierauf lasse man diese zweite Ellipse sich parallel zu sich selbst fortbewegen, und zwar dergestalt, daß ihr Mittelpunkt O' die Gerade CC' durchläuft, und daß, während ihre Halbachsen das constante Verhältniß $\frac{a}{b}$ zu einander behalten, die erste nach und nach den verschiedenen Ordinaten $O'D$ der festen Ellipse $CAC'A'$ gleich wird. Wenn die bewegliche Ellipse durch den Mittelpunkt geht, so erreicht sie ihre größte Ausdehnung, weil die veränderliche Halbachse a' ihren größten Werth $OA = a$ erreicht hat. Stellt man durch $OB = b$ die Länge dar, welche die zweite Achse b' in dieser Lage annimmt; so sind die drei Linien $AA' = 2a$, $BB' = 2b$, $CC' = 2c$ die Achsen des so erzeugten Ellipsoids.

Eine andere Erzeugungsart des Ellipsoids ist folgende: Man construire in den Coordinatenebenen xy und xz mit den Geraden $2a$, $2b$ und $2a$, $2c$ als Achsen, Ellipsen, deren Mittelpunkte in O liegen; alsdann lege man durch die Achse $2c$ eine Reihe von Ebenen; eine jede davon wird die in der Ebene yx liegende Ellipse in einem ihrer Durchmesser schneiden. Zeichnet man nun in jeder schneidenden Ebene mit jenem dazu gehörigen Durchmesser und der Geraden $2c$ als Achsen Ellipsen, so bestimmt diese Reihe von Ellipsen das Ellipsoid vollkommen.

2. Um das einfächerige Hyperboloid zu construiren, nehme man als Richtungslinie statt der Ellipse eine Hyperbel DAE, $D'A'E'$ (Fig. 20),

in welcher OA = a die reelle und OC = c die imaginäre Halbachse ist; hierauf zeichne man in einer auf OC senkrechten Ebene eine Ellipse DG′D′G′, deren eine Achse gleich der Sehne DD′ der Hyperbel ist. Läßt man dann diese Ellipse sich nach dem nämlichen Gesetze wie vorhin fortbewegen, so entsteht das Hyperboloid mit einem Fache. Die bewegliche Ellipse wird am kleinsten und bildet die sogenannte Kehlellipse, wenn die veränderliche Achse DD′ die Lage von AA′ erhalten hat.

Um das Hyperboloid nach der zweiten Methode zu beschreiben, construire man in der Ebene xy mit den Achsen AA′=2a und BB′=2b eine Ellipse; alsdann lege man durch die Achse OC verschiedene Ebenen und verzeichne in jeder derselben eine Hyperbel, deren Querachse, der durch den Durchschnitt jener Ebene und der erwähnten Ellipse entstandene Durchmesser, und deren conjugirte Achse die Gerade 2c ist.

3. Für das zweifächerige Hyperboloid construire man ebenfalls eine Hyperbel, deren reelle Halbachse OA=a und imaginäre OC=c ist; alsdann lasse man die Ellipse DG′D′G (Fig. 21) wieder wie vorhin sich bewegen. Zwischen den Punkten A und A′ wird die veränderliche Sehne DD′, welche die eine Achse der beweglichen Ellipse abgibt, imaginär ausfallen, was dann auch mit der zweiten Achse O′G der Fall sein wird.

Nach der zweiten Methode zeichne man in der Ebene xy mit AA′=2a und BB =2b als Achsen die Hyperbel DAD′, EA′E′; ferner lege man durch die Achse Oz oder 2c eine Reihe von Ebenen, wodurch eben so viele Durchmesser unserer Hyperbel als Durchschnitte jener Ebenen mit der Coordinatenebene xy entstehen; endlich construire man mit jedem von diesen Durchmessern als Querachse und mit der Geraden 2c als imaginäre Achse in jeder der entsprechenden Ebenen eine Hyperbel.

§. 71. Wir kommen jetzt zur Erzeugungsart der Flächen der zweiten Klasse.

1. Um das elliptische Paraboloid zu construiren, wähle man zur Leitlinie eine feste Parabel AOA′ (Fig. 22), lasse dann senkrecht auf ihre Achse Ox eine Ellipse ABA′B′ in der Art sich fortbewegen, daß die erste Achse CA=a′ mit der veränderlichen Ordinate jener

Parabel zusammenfalle, und die zweite Achse $CB = b'$ jederzeit zu der ersten in einem constanten Verhältniß stehe.

Das elliptische Paraboloid kann auch durch die Bewegung der Parabel BOB' erzeugt werden, in der Art, daß sie fortwährend mit der Ebene xz parallel bleibt und ihr Scheitel nach und nach alle Punkte einer fixen Parabel AOA' durchläuft. Denn die dem elliptischen Paraboloid angehörige Gleichung $lz^2 + my^2 - px = 0$ ist das Resultat der Elimination der Größe β zwischen den Gleichungen

$$y = \beta \text{ und } z^2 = \frac{px}{l} - \frac{m\beta^2}{l}.$$

2. Um das hyperbolische Paraboloid zu construiren, wähle man statt der Erzeugungsellipse jetzt eine Hyperbel DAD', $EA'E'$ (Fig. 23), welche in der auf Ox senkrecht stehenden Ebene liegt und die Geraden CA, CG zu Halbachsen hat; lasse dann diese Hyperbel sich parallel zu sich selbst dargestellt fortbewegen, daß das Achsenverhältniß sich nicht ändert, während die reelle Halbachse nach und nach den verschiedenen Ordinaten CA der festen Parabel gleich ist. Die bewegliche Hyperbel beschreibt auf diese Weise zwei offene, durch einen hohlen Raum von einander geschiedene Flächenäste. Ist die veränderliche Hyperbel in O angekommen, so wird ihre reelle Achse gleich Null; gleichzeitig reducirt sich die Hyperbel auf ihre Asymptoten und unsere zwei Flächenäste vereinigen sich in eins, so daß sie in ihrer Gesammtheit eine ununterbrochene Fläche darstellen.

Das hyperbolische Paraboloid kann, wie das elliptische, durch die Bewegung einer Parabel BOB' auf einer festen AOA' erzeugt werden; nur müssen hier die feste und bewegliche Parabel nach entgegengesetzten Richtungen (in der Richtung der positiven und negativen x) liegen.

Von den Kreisschnitten in den Flächen des zweiten Grades.

§. 72. Wir wollen jetzt untersuchen, ob alle Flächen des zweiten Grades durch gehörig gelegte Ebenen in Kreislinien geschnitten werden können. Wir führen deshalb in die allgemeine Gleichung der Flächen mit einem Mittelpunkt $lz^2 + my^2 + nx^2 = 1$ folgende Formeln ein:

$$x = x'\cos\psi + y'\cos\delta\sin\psi + \alpha,$$

$$y = x'\sin\psi - y'\cos\delta\cos\psi + \beta,$$

$$z = y'\sin\delta + \gamma,$$

wo δ die Neigung der schneidenden Ebene gegen die Ebene xy darstellt, und ψ den Winkel, welchen ihr Grundschnitt auf dieser Ebene mit der Achse der x macht, ferner α, β, γ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der schneidenden Ebene sind, welcher zum Ursprung der x' y' z' gewählt wird. Durch diese Substitution erhält man, wenn die Accente von x', y', z' weggelassen werden:

$$\begin{aligned}&(l\sin^2\delta+m\cos^2\delta\cos^2\psi+n\cos^2\delta\sin^2\psi)y^2\\&+(n\cos^2\psi+m\sin^2\psi)x^2\\&+2(n-m)\sin\psi\cos\psi\cos\delta\cdot xy\\&+2(\alpha n\cos\delta\sin\psi-\beta\cos\delta\cos\psi+\gamma l\sin\delta)y\\&+2(\alpha n\cos\psi+\beta m\sin\psi)x\\&=i-l\gamma^2-m\beta^2-n\alpha^2.\end{aligned}$$

Soll diese Gleichung einem Kreise entsprechen; so hat man die beiden Bedingungsgleichungen:

$$2(n-m)\sin\psi\cos\psi\cos\delta=0\quad .\ .\ .\ (9)$$

$$l\sin^2\delta+m\cos^2\delta\cos^2\psi+n\cos^2\delta\sin^2\psi=n\cos^2\psi+m\sin^2\psi\quad .\ .\ ,\ (10).$$

Da im Allgemeinen n und m ungleich sind, so liefert die Gleichung (9) folgende drei Annahmen:

$$\sin\psi=0,\ \cos\psi=0,\ \text{oder}\ \cos\delta=0.$$

Für $\sin\psi=0$ erhält man dann aus (10): $\tang\delta=\pm\sqrt{\left(\frac{n-m}{l-n}\right)}$;

Für $\cos\psi=0$ folgt aus (10): $\tang\delta=\pm\sqrt{\left(\frac{m-n}{l-m}\right)}$;

Für $\cos\delta=0$ entsteht aus (10): $\tang\psi=\pm\sqrt{\left(\frac{l-n}{m-l}\right)}$.

Aus dem Produkt der drei in diesen Gleichungen vorkommenden Brüche, nämlich aus

$$\frac{n-m}{l-n}\cdot\frac{m-n}{l-m}\cdot\frac{l-n}{m-l}=\left(\frac{n-m}{l-m}\right)^2,$$

ergibt sich, daß von diesen drei Brüchen immer wenigstens einer positiv sein muß. Ist aber einer, z. B. der erste Bruch positiv: so sind die beiden andern negativ. In der That muß, damit solches statt habe, sein:

$$n-m>\ \text{oder}\ <0,$$

$$l-n>\ \text{oder}\ <0,$$

mithin auch $\quad l-m>\ \text{oder}\ <0.$

Hieraus entsteht durch Addition $2(l-m)>$ oder <0. Es haben daher sowohl $m-n$ und $l-m$, als auch $l-n$ und $m-l$ verschiedene Zeichen, oder mit andern Worten, der zweite und dritte Bruch sind negativ. Auf dieselbe Art zeigt man, daß der erste und dritte, oder erste und zweite Bruch negativ sein müssen, wenn der zweite oder dritte Bruch positiv ist. Von den drei Systemen von Gleichungen, welche die gesuchte Lage der schneidenden Ebenen feststellen, liefert demnach nur eins reelle Werthe für die betreffenden Winkel, dabei bleiben die Coordinaten α, β, γ völlig unbestimmt; woraus hervorgeht, daß bei den Flächen vom zweiten Grade, welche einen Mittelpunkt haben, es jederzeit zwei Reihen paralleler Ebenen gibt, durch die sie in Kreislinien geschnitten werden.

Für das Ellipsoid ist, nachdem in die drei obigen Systeme von Gleichungen statt n, m, l ihre Werthe $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ eingeführt worden, wo $a>b>c$ vorausgesetzt wird, nur die Annahme $\psi=\frac{\pi}{2}$ brauchbar; dieselbe gibt:

$$\operatorname{tang}\delta=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}\right)};$$

Die Ebenen, welche das Ellipsoid in Kreislinien schneiden, gehen daher durch die mittlere Achse oder sind ihr parallel.

Ist das Ellipsoid durch Umdrehung um eine der Achsen, z. B. um die der x entstanden, mithin $b=c$; so wird die erste Gleichung unseres obigen Systems imaginär, während die beiden andern geben:

$$\cos\psi=0,\ \cos\delta=0 \text{ und } \cos\delta=0,\ \cos\psi=0.$$

Hieraus sieht man, daß die schneidende Ebene jetzt nur einer Lage fähig ist, derjenigen nämlich, in welcher sie durch die beiden gleichen Achsen geht oder ihnen parallel ist.

Ist endlich $a=b=c$, so liefern unsere drei Systeme für ψ und δ unbestimmte Werthe. In diesem Falle gibt also jede beliebige schneidende Ebene einen Kreis, wie es auch sein muß, da alsdann das Ellipsoid mit einer Kugel identisch ist.

Für das Hyperboloid mit einem Fache, wo l negativ wird, ist nur die erste Annahme $\psi=0$ brauchbar. Diese gibt, nachdem in

unserm Systeme von Gleichungen wieder statt n, m, —l ihre Werthe $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $-\frac{1}{c^2}$ eingeführt worden, wo $a > b$ ist: $\operatorname{tg}\delta = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}\right)}$.

Die Ebenen, welche das Hyperboloid mit einem Fache in Kreise schneiden, gehen also durch die größte der beiden reellen Achsen, oder sind ihr parallel.

Bei dem Rotationshyperboloid hat man nur eine Folge von parallelen Ebenen, welche dasselbe in Kreislinien schneiden, und zwar stehen diese auf der Rotationsachse senkrecht.

Für das Hyperboloid mit zwei Fächern, wo l und m negativ sind, kann man nur $\psi = \frac{\pi}{2}$ setzen. Dies gibt $\operatorname{tang}\delta = \pm\frac{c}{a}\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{b^2-c^2}\right)}$, wo $b > c$ ist.

Die Ebenen, welche das Hyperboloid mit zwei Fächern in Kreisen schneiden, sind daher alle der größten von den beiden imaginären Achsen parallel.

Ist die Fläche durch Umdrehung entstanden, so reduciren sich die beiden Folgen kreisförmiger Schnitte wieder auf eine einzige.

§. 73. Wir gehen nun zu den Flächen des zweiten Grades, welche keinen Mittelpunkt haben, über, um zu sehen, ob sie kreisförmige Schnitte zulassen. Wir setzen zu diesem Behufe in ihre allgemeine Gleichung $lz^2 + my^2 = nx$ statt x, y, z beziehungsweise die bereits angewendeten Werthe:

$$x'\cos\psi + y'\cos\delta\sin\psi + \alpha,$$
$$x'\sin\psi - y'\cos\delta\cos\psi + \beta,\ y'\sin\delta + \gamma.$$

Wir erhalten dadurch, wenn wieder die Accente weggelassen werden, folgende Gleichung:

$$(l\sin^2\delta + m\cos^2\delta\cos^2\psi)y^2 + m\sin^2\psi\cdot x^2 - 2mxy\cdot\sin\psi\cos\psi\cos\delta + \ldots = 0.$$

Soll diese Gleichung einem Kreise angehören, so haben wir die beiden Bedingungen:

$$\sin\psi\cos\psi\cos\delta = 0\,, \ldots (11)$$
$$l\sin^2\delta + m\cos^2\delta\cos^2\psi = m\sin^2\psi. \ldots (12)$$

Die Gleichung (11) bietet uns blos die beiden Annahmen:

$$\psi = \frac{\pi}{2},\ \delta = \frac{\pi}{2},$$

dar, für welche die Gleichung (12) beziehungsweise

$$\sin\delta = \pm\sqrt{\frac{m}{l}}, \quad \sin\psi = \pm\sqrt{\frac{l}{m}}$$

gibt; denn die erste Hypothese $\sin\psi = 0$ ist zu verwerfen, weil sonst der Coefficient von x^2 Null würde, was der Gleichung des Kreises widerstreitet.

Für das elliptische Paraboloid haben m und l einerlei Zeichen; von den beiden Systemen ist daher entweder nur das erste oder zweite reell, je nachdem $m <$ oder $> l$ ist.

Es sind demnach immer zwei Folgen paralleler Ebenen möglich, welche das elliptische Paraboloid in Kreisen schneiden; dieselben laufen im ersten Falle mit der Achse Oy parallel; im andern Falle aber stehen die zwei Folgen jener Ebenen senkrecht auf der Coordinatenebene xy.

Für $l = m$ liefern beide Systeme übereinstimmend $\psi = 90^0$ mit $\delta = 90^0$: das Rotationsparaboloid wird daher nur von einer einzigen Reihe paralleler Ebenen, die senkrecht auf der Umdrehungsachse stehen, in Kreisen geschnitten.

Für das hyperbolische Paraboloid ist l negativ. Die beiden Systeme sind daher imaginär und es kann diese Fläche durch keine Ebene kreisförmig geschnitten werden. Dies Resultat stimmt mit dem im §. 66 Gesagten vollkommen überein, dem zufolge die ebenen Schnitte des hyperbolischen Paraboloids nie geschlossene Curven sein können.

Discussion der Gleichungen des zweiten Grades mit drei Veränderlichen.

§. 74. Die Flächen des zweiten Grades werden, wie schon gesagt, in solche eingetheilt, welche einen Mittelpunkt haben, und in solche, welche keinen Mittelpunkt haben. Zu der erstern Klasse gehören: das Ellipsoid, das einfächerige Hyperboloid, das zweifächerige Hyperboloid, der elliptische Kegel, der elliptische und hyperbolische Cylinder. Zu der zweiten Klasse gehören: das elliptische Paraboloid, das hyperbolische Paraboloid und der parabolische Cylinder.

Wir wollen nun zeigen, woran man die Klasse und das Geschlecht einer Fläche zweiter Ordnung erkennen kann, die durch eine auf

rechtwinklige Coordinaten bezogene Gleichung, deren Coefficienten bestimmte Zahlen sind, dargestellt wird.

Diese Gleichung sei:

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy+2cx+2c'y+2c''z+d=0 \ldots (1).$$

Wir haben vorerst zu untersuchen, ob die Fläche einen Mittelpunkt habe oder nicht. Wir setzen deshalb für x, y, z, $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$ in (1) und bestimmen α, β, γ dergestalt, daß in der transformirten Gleichung die Coefficienten von x, y, z Null werden. Es gibt uns dies folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a\alpha+b''\beta+b'\gamma+c=0, \\ b''\alpha+a'\beta+b\gamma+c'=0, \\ b'\alpha+b\beta+a''\gamma+c''=0. \end{array}\right\} (2)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn der Kürze halber

$$N=ab^2+a'b'^2+a''b''^2-aa'a''-2bb'b''$$

gesetzt wird, für die Coordinaten des Mittelpunktes:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=\dfrac{c(a'a''-b^2)+c'(bb'-a''b'')+c''(bb''-a'b')}{N}, \\ \beta=\dfrac{c(bb'-a''b'')+c'(aa''-b'^2)+c''(b'b''-ab)}{N}, \\ \gamma=\dfrac{c(bb''-a'b')+c'(b'b''-ab)+c''(aa'-b''^2)}{N}. \end{array}\right\} (3)$$

Haben nun α, β, γ endliche und völlig bestimmte Werthe, was jederzeit der Fall sein wird, wenn $N \gtrless 0$; so hat die durch (1) repräsentirte Fläche einen Mittelpunkt.

Verlegt man den Ursprung dahin, so bekommt man für die Fläche folgende Gleichung:

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy=k \ldots (4)$$ wo

$$k=-(a\alpha^2+a'\beta^2+a''\gamma^2+2b\beta\gamma+2b'\alpha\gamma+2b''\alpha\beta+2c\alpha+2c'\beta+2c''\gamma+d)$$ ist.

Wir wollen, um die Diskussion abzukürzen, das constante Glied k im zweiten Theil der Gleichung (4) stets positiv annehmen, was wir, ihrer Allgemeinheit unbeschadet, thun können.

§. 75. Wenn die Größe k verschwindet, so stellt die Gleichung (4) eine Kegelfläche dar, deren Scheitel der Anfang der Coordinaten

ist. Denn combinirt man diese Gleichung mit der, einer beliebigen durch den Ursprung gelegten Ebene angehörigen Gleichung $z=mx+ny$; so erhält man ein Resultat von der Form $y=x(k\pm\sqrt{i})$; d. h. alle Schnitte bestehen aus zwei stets durch den Anfangspunkt gehenden Geraden, was das charakterisirende Merkmal einer Kegelfläche ist.

Wenn dabei die drei Größen b, b', b'' sämmtlich Null sind, und die drei Größen a, a', a'', ohne daß eine derselben Null ist, gleiche Zeichen haben; so reducirt sich die Kegelfläche auf einen Punkt, nämlich den Ursprung der Coordinaten.

§. 76. Verschwindet das constante Glied k nicht, so kann die Gleichung (4) entweder ein Ellipsoid oder eines der beiden Hyperboloiden darstellen. Unsere Frage ist daher jetzt, zu ermitteln, welche Relation zwischen den Coefficienten der Gleichung (4) stattfinden müsse, um einer oder der andern jener Flächen anzugehören. Wir gehen deshalb von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z zu den ebenfalls rechtwinkligen Coordinaten x', y', z' über, indem wir uns der bekannten Formeln

$$x=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha'+z'\cos\alpha'',$$
$$y=x'\cos\beta+y'\cos\beta'+z'\cos\beta'',$$
$$z=x'\cos\gamma+y'\cos\gamma'+z'\cos\gamma''$$ bedienen.

Dabei finden die sechs Bedingungsgleichungen statt:

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma&=1,\\ \cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma'&=1,\\ \cos^2\alpha''+\cos^2\beta''+\cos^2\gamma''&=1;\\ \cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'&=0,\\ \cos\alpha'\cos\alpha''+\cos\beta'\cos\beta''+\cos\gamma'\cos\gamma''&=0,\\ \cos\alpha\cos\alpha''+\cos\beta\cos\beta''+\cos\gamma\cos\gamma''&=0;\end{aligned}\right\}\ (A)$$

an deren Stelle folgende treten können:

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha'+\cos^2\alpha''&=1,\\ \cos^2\beta+\cos^2\beta'+\cos^2\beta''&=1,\\ \cos^2\gamma+\cos^2\gamma'+\cos^2\gamma''&=1;\\ \cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha'\cos\beta'+\cos\alpha''\cos\beta'&=0,\\ \cos\alpha\cos\gamma+\cos\alpha'\cos\gamma'+\cos\alpha''\cos\gamma''&=0,\\ \cos\beta\cos\gamma+\cos\beta'\cos\gamma'+\cos\beta''\cos\gamma''&=0.\end{aligned}\right\}\ (B)$$

Es läßt sich aber jederzeit, wie wir wissen, die Gleichung (4) auf die Form

$$px'^2+p'y'^2+p''z'^2=k \;...\; (5)$$ bringen.

Unsere Aufgabe läuft nun dahinaus, die Größen p, p', p'' zu finden. Die dazu nöthige Gleichung gewinnt man nach Bret, Professor der Mathematik in Grenoble, dadurch, daß man von der Gleichung (5) auf (4) zurückgeht. Wir haben demnach unmittelbar aus §. 44 die Formeln:

$$x'=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma,$$
$$y'=x\cos\alpha'+y\cos\beta'+z\cos\gamma',$$
$$z'=x\cos\alpha''+y\cos\beta''+z\cos\gamma''.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (5) und Zusammenstellung der daraus resultirenden mit der Gleichung (4) entspringt:

$$\left.\begin{array}{l} p\cos^2\alpha+p'\cos^2\alpha'+p''\cos^2\alpha''=a, \\ p\cos^2\beta+p'\cos^2\beta'+p''\cos^2\beta''=a', \\ p\cos^2\gamma+p'\cos^2\gamma'+p''\cos^2\gamma''=a''; \end{array}\right\} (C)$$

$$\left.\begin{array}{l} p\cos\beta\cos\gamma+p'\cos\beta'\cos\gamma'+p''\cos\beta''\cos\gamma''=b, \\ p\cos\gamma\cos\alpha+p'\cos\gamma'\cos\alpha'+p''\cos\gamma''\cos\alpha''=b', \\ p\cos\alpha\cos\beta+p'\cos\alpha'\cos\beta'+p''\cos\alpha''\cos\beta''=b''. \end{array}\right\} (D)$$

Die verlangte Gleichung werden wir offenbar erhalten, wenn wir vermittelst der Bedingungsgleichungen die Werthe von

$p+p'+p''$, $pp'+pp''+p'p''$ und $pp'p''$ suchen.

Durch Addition der Gleichungen (C) entsteht, wenn man die Gleichungen (A) berücksichtigt, sofort:

$$p+p'+p''=a+a'+a''.$$

Ferner geben uns die Gleichungen (C), wenn das Produkt aa' gebildet wird:

$$\begin{aligned} aa'=&p^2\cos^2\alpha\cos^2\beta+p'^2\cos^2\alpha'\cos^2\beta'+p''^2\cos^2\alpha''\cos^2\beta'' \\ &+pp'(\cos^2\alpha\cos^2\beta'+\cos^2\alpha'\cos^2\beta) \\ &+pp''(\cos^2\alpha\cos^2\beta''+\cos^2\alpha''\cos^2\beta) \\ &+p'p''(\cos^2\alpha'\cos^2\beta''+\cos^2\alpha''\cos^2\beta'). \end{aligned}$$

Die dritte der Gleichungen (D) liefert:

$$b''^2 = p^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + p'^2\cos^2\alpha'\cos^2\beta' + p''^2\cos^2\alpha''\cos^2\beta''$$
$$+ 2pp' \cos\alpha \cos\beta \cos\alpha' \cos\beta'$$
$$+ 2pp'' \cos\alpha \cos\beta \cos\alpha'' \cos\beta''$$
$$+ 2p'p'' \cos\alpha' \cos\beta' \cos\alpha'' \cos\beta''.$$

Indem man dieses Resultat von dem vorhergehenden abzieht, entsteht:

$$aa' - b''^2 = pp' (\cos\alpha \cos\beta' - \cos\alpha' \cos\beta)^2$$
$$+ pp'' (\cos\alpha \cos\beta'' - \cos\alpha'' \cos\beta)^2$$
$$+ p'p''(\cos\alpha' \cos\beta'' - \cos\alpha'' \cos\beta')^2.$$

Eben so findet man:

$$a'a'' - b^2 = pp' (\cos\beta \cos\gamma' - \cos\beta' \cos\gamma)^2$$
$$+ pp'' (\cos\beta \cos\gamma'' - \cos\gamma \cos\beta'')^2$$
$$+ p'p''(\cos\beta' \cos\gamma'' - \cos\gamma' \cos\beta'')^2; \text{ und}$$

$$aa'' - b'^2 = pp' (\cos\gamma \cos\alpha' - \cos\gamma' \cos\alpha)^2$$
$$+ pp'' (\cos\gamma \cos\alpha'' - \cos\gamma'' \cos\alpha)^2$$
$$+ p'p''(\cos\gamma' \cos\alpha'' - \cos\gamma'' \cos\alpha')^2.$$

Folglich $aa' + aa'' + a'a'' - b^2 - b'^2 - b''^2 =$

$$pp' [(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta)^2 + (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma)^2$$
$$+ (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\alpha)^2]$$
$$+ pp'' [(\cos\alpha\cos\beta'' - \cos\alpha''\cos\beta)^2 + (\cos\beta\cos\gamma'' - \cos\beta''\cos\gamma)^2$$
$$+ (\cos\gamma\cos\alpha'' - \cos\gamma''\cos\alpha)^2]$$
$$+ p'p''[(\cos\alpha'\cos\beta'' - \cos\alpha''\cos\beta')^2 + (\cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\beta''\cos\gamma')^2$$
$$+ (\cos\gamma'\cos\alpha'' - \cos\gamma''\cos\alpha')^2].$$

Zieht man aber von dem Produkt der beiden ersten Gleichungen (A) das Quadrat der vierten ab, so kommt:

$$(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta)^2 + (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma)^2$$
$$+ (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\alpha)^2 = 1$$

Zwei analoge Resultate erhalten wir durch die Zusammenstellung je drei anderer Gleichungen (A).

Diese Werthe oben substituirt, hat man:

$$aa' + aa'' + a'a'' - b^2 - b'^2 - b''^2 = pp' + pp'' + p'p''.$$

Es bleibt uns jetzt noch übrig, $pp'p''$ durch die Coefficienten der Gleichung (4) auszudrücken. Zu diesem Behufe bilden wir das

Produkt der drei Gleichungen (C): da jedoch hierbei viele einander ähnlich gebildete und blos durch Accente unterschiedene Glieder vorkommen, so wird es vortheilhaft sein, eine Zeichensprache einzuführen, die das Wiederholen erspart. Deshalb soll das Zeichen Σ_6 vor ein Glied gesetzt, die Summe von diesem und 5 andern demselben ähnlich gebildeten Gliedern bedeuten; desgleichen Σ_3 die Summe von 3 Gliedern, wovon eines nach dem Zeichen in Klammern steht und die zwei andern ihm analog gebildet sind. Hiernach wird z. B.

$$p^3\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma+p'^3\cos 2\alpha'\cos^2\beta'\cos^2\gamma'+p''^3\cos^2\alpha''\cos^2\beta''\cos^2\gamma''$$

durch $\Sigma_3[p^3\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma]$

ausgedrückt werden. Man erhält auf diese Art das obenerwähnte Produkt:

$$aa'a''=\Sigma_3[p^3\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma]$$
$$+\Sigma_6[(\cos^2\alpha\cos 2\beta\cos^2\gamma'+\cos^2\beta\cos^2\gamma\cos^2\alpha'+\cos^2\alpha\cos^2\gamma\cos^2\beta')p^2p']$$
$$+pp'p''\Sigma_6[\cos^2\alpha\cos^2\beta'\cos^2\gamma''].$$

Das Produkt der Gleichungen (D) gibt auf dieselbe Weise:

$$bb'b''=\Sigma_3[p^3\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma]$$
$$+\Sigma_6[p^2p'(\cos^2\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\beta'\cos\gamma'+\cos^2\beta\cos\alpha\cos\gamma\cos\alpha'\cos\gamma'$$
$$+\cos^2\gamma\cos\alpha\cos\beta\cos\alpha'\cos\beta')]$$
$$+pp'p''\Sigma_6[\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha'\cos\gamma'\cos\alpha''\cos\beta''].$$

Quadrirt man die erste von den Gleichungen (D) und multiplicirt das Resultat mit der ersten der Gleichungen (C), thut dann dasselbe mit den zweiten und dritten Gleichungen; so erhält man folgende Produkte:

$$ab^2=\Sigma_3[p^3\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma]$$
$$+\Sigma_6[(\cos^2\beta\cos^2\gamma\cos^2\alpha'+2\cos^2\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\beta'\cos\gamma')p^2p']$$
$$+2p'p'p''\Sigma_3[\cos\beta\cos\gamma\cos\beta'\cos\gamma'\cos^2\alpha''];$$

$$a'b'^2=\Sigma_3[p^3\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma]$$
$$+\Sigma_6[p^2p'(\cos^2\gamma\cos^2\alpha\cos^2\beta'+2\cos^2\beta\cos^2\gamma\cos^2\alpha\cos^2\gamma'\cos^2\alpha')]$$
$$+2pp'p''\Sigma_3[\cos\alpha\cos\gamma\cos\alpha'\cos\gamma'\cos^2\beta''];$$

$$a''b''^2=\Sigma_3[p^3\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma]$$
$$+\Sigma_6[p^2p'(\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma'+2\cos^2\gamma\cos\alpha\cos\beta\cos\alpha'\cos\beta')]$$
$$+2pp'p''\Sigma_3[\cos\alpha\cos\beta\cos\alpha'\cos\beta'\cos^2\gamma''].$$

Aus diesen fünf Gleichungen erhalten wir bei einiger Aufmerksamkeit folgendes Resultat:

$$aa'a''+2bb'b''-ab^2-a'b'^2-a''b''^2=$$

$$=pp'p''\left\{\begin{array}{l}\Sigma_6[\cos^2\alpha\cos^2\beta'\cos^2\gamma''] \\ +\Sigma_6[\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha'\cos\gamma'\cos\alpha''\cos\beta''] \\ \Sigma_9[2\cos\beta\cos\gamma\cos\beta'\cos\gamma'\cos^2\alpha'']\end{array}\right\}\ (E)$$

Machen wir aber ganz die nämlichen Operationen mit den Bedingungsgleichungen (B), welche wir so eben mit den Gleichungen (C) und (D) vorgenommen haben; so gelangen wir zu dem nachstehenden Resultat.

$$1=\Sigma_6[\cos^2\alpha\cos^2\beta'\cos^2\gamma'']+\Sigma_6[\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha'\cos\gamma'\cos\alpha''\cos\beta'']$$
$$-\Sigma_9[2\cos\beta\cos\gamma\cos\beta'\cos\gamma'\cos^2\alpha''],$$

welches sich unmittelbar aus (E) herleiten läßt, wenn wir darin

$a=a'=a''=p=p'=p''=1$, und $b=b'=b''=0$ setzen;

denn bei dieser Annahme gehen die Gleichungen (C) und (D) in die Gleichungen (B) über. Hieraus folgt:

$$aa'a''+2bb'b''-ab^2-a'b'^2-a''b''^2=pp'p''..$$

Die gesuchte Gleichung in t, deren Wurzeln die Werthe von p, p', p'' sind, wäre hiernach:

$$t^3-(a+a'+a'')t^2+(a'a''+aa''+aa'-b^2-b'^2-b''^2)t$$
$$+ab^2+a'b'^2+a''b''^2-2bb'b''-aa'a''=0\ .\ .\ .\ (6).$$

Anmerkung. Was die Coefficienten dieser Gleichung betrifft, so sehen wir:

1. Daß das bekannte Glied mit der Größe N, welche den Nenner in den Werthen der Mittelpunktscoordinaten abgibt, vollkommen übereinstimmt;
2. Daß der Coefficient von t^2 gleich der Summe aus den drei Coefficienten der Quadrate der Variabeln ist;
3. Daß der Coefficient von t aus der Summe der drei Binome

   b''^2-aa', b'^2-aa'', $b^2-a'a''$

   besteht, die das Geschlecht der Schnitte bestimmen, welche durch die Coordinatenebenen xy, xz, yz erzeugt werden.

§. 77. Aus der Theorie der Gleichungen wissen wir, daß die Gleichung (6) immer wenigstens eine reelle Wurzel besitzt; es läßt

sich aber darthun, daß stets alle drei Wurzeln dieser Gleichung reell sind, was Cauchy in seinen Exercices de Mathématiques (Troisième année) folgendermaßen bewiesen hat: Er schreibt zu diesem Ende die Gleichung (6) wie folgt:

$$(t-a)(t-a')(t-a'')-b^2(t-a)-b'^2(t-a')$$
$$-b''^2(t-a'')-2bb'b''=T=0.$$

Hierauf macht er $b'=b''=0$, was ihm dann folgende drei Wurzeln liefert:

$$t=a,\ t'=\frac{a'+a''}{2}-\sqrt{\left[\left(\frac{a'-a''}{2}\right)^2+b^2\right]},$$
$$t''=\frac{a'+a''}{2}+\sqrt{\left[\left(\frac{a'-a''}{2}\right)^2+b^2\right]}.$$

Alsdann kehrt er zu der allgemeinen Gleichung zurück, und setzt nach und nach:

$$t=-\frac{1}{0},\ t=t',\ t=t'',\ t=+\frac{1}{0},$$

wodurch die Funktion T nachstehende Werthe erlangt, wenn wir dieselben beziehungsweise mit $T-\infty$, $T_{t'}$, $T_{t''}$ und $T\infty$ bezeichnen, und erwägen, daß die Größe

$(t-a)(t-a')(t-a'')-b^2(t-a)$ für $t=t'$ und $t=t''$ verschwindet:

$$T_{-\infty}=-\frac{1}{0},$$

$$T_{t'}=-b'^2(t'-a')-b''^2(t'-a'')-2bb'b''=-2bb'b''$$
$$+\frac{a'-a''}{2}(b'^2-b''^2)+(b'^2+b''^2)\sqrt{\left[\left(\frac{a'-a''}{2}\right)^2+b^2\right]}$$

$$T_{t''}=-b'^2(t''-a')-b''^2(t''-a'')-2bb'b''=-2bb'b''$$
$$+\frac{a'-a''}{2}(b'^2-b''^2)-(b'^2+b''^2)\sqrt{\left[\left(\frac{a'-a''}{2}\right)^2+b^2\right]},$$

$$T_{+\infty}=+\frac{1}{0}.$$

Der Anblick der Werthe von Tt' und Tt'' zeigt, daß dieselben die Wurzeln einer quadratischen Gleichung von der Form:

$$T^2+2PT+Q=0 \text{ sind;}$$

$$\text{wo } P = 2bb'b'' + \frac{a'-a''}{2}(b''^2 - b'^2) \text{ und}$$

$$Q = -[b(b'^2 - b''^2) + (a' - a'')\, b'b'']^2.$$

Q ist also jederzeit negativ, woraus hervorgeht, daß $T_{t'}$ und $T_{t''}$ verschiedene Zeichen haben müssen, und zwar wird letzteres negativ sein, was sich aus der vergleichenden Zusammenstellung ihrer beiden Werthe ergibt.

Die Annahmen

$$t = -\frac{1}{0'}\; t = t', \; t = t'' \text{ und } t = +\frac{1}{0}$$

liefern also abwechselnd negative und positive Resultate für T; die Gleichung (6) hat mithin drei reelle Wurzeln zwischen $-\frac{1}{0}$ und t', zwischen t' und t'', zwischen t'' und $+\frac{1}{0}$.

§. 78. Die Gleichung (6) wird also, weil sie lauter reelle Wurzeln besitzt, nach Descartes bekannter Regel, eben so viele positive Wurzeln haben, als in ihr Zeichenwechsel vorkommen, und eben so viele negative, als sie Zeichenfolgen hat. Hiernach wäre also weiter nichts nöthig, als aus den numerischen Coefficienten der Gleichung (4), wo das bestimmte Glied k des zweiten Theiles positiv vorausgesetzt wird, die Gleichung (6) abzuleiten und die Zahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen zu berücksichtigen. Dabei können sich vier Fälle darbieten, nämlich:

I. Die Gleichung (6) hat drei Zeichenwechsel, also drei positive Wurzeln; alsdann gehört die Gleichung (1) einem Ellipsoid an.

II. Die Gleichung (6) hat zwei Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge, mithin zwei positive Wurzeln und eine negative; die Fläche ist dann ein einfächeriges Hyperboloid.

III. Die Gleichung (6) hat einen Zeichenwechsel und zwei Zeichenfolgen, mithin zwei negative Wurzeln und eine positive; die Gleichung (1) entspricht dann einem zweifächerigen Hyperboloid.

IV. Die Gleichung (6) hat lauter Zeichenfolgen, also alle ihre Wurzeln negativ; die Fläche wird dann imaginär.

§. 79. Zur Erläuterung der vorigen Regeln mögen nachstehende Beispiele dienen:

I. $36x^2+9y^2+4z^2+24z+36y+72x+72=0$. Man findet:

$$\alpha=-1,\ \beta=-2,\ \gamma=-3;$$

also gehört die Fläche in die erste Klasse; sie ist ein Ellipsoid, dessen halbe Achsen 1, 2 und 3 sind.

II. $x^2+3y^2-2z^2+2xy+4yz+z+4y+3x=5$.

Die auf den Mittelpunkt bezogene Gleichung ist:

$$x^2+3y^2-2z^2+2xy+4yz=5+\frac{38}{16},\ \text{weil}$$

$$\alpha=-\frac{5}{4},\ \beta=-\frac{1}{4},\ \gamma=0.$$

Die gegebene Fläche gibt sich, vermöge der Bedingungsgleichung (6), als ein einfächeriges Hyperboloid zu erkennen.

III. Die Gleichung $x^2+2y^2-3z^2+4xy-6xz-6yz+x+y+z=3$,

für welche $\alpha=\beta=0,\ \gamma=\frac{1}{6}$,

gehört einem zweifächerigen Hyperboloid an.

IV. Die Gleichung $3x^2+y^2+z^2-2xy+yz-3xz+y+2=0$

hat keine geometrische Bedeutung, weil die Gleichung (6) hier 3 Zeichenfolgen darbietet.

§. 80. Wir gehen jetzt zu dem Fall über, wo $N=0$ ist. Dann haben wir stets die Beschaffenheit der drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a\alpha+b''\beta+b'\gamma+c=0, \\ b''\alpha+a'\beta+b\gamma+c'=0, \\ b'\alpha+b\beta+a''\gamma+c''=0, \end{array}\right\} (3)$$

besonders zu untersuchen.

Reduciren sich diese drei Gleichungen auf eine einzige, so stellt solche eine Ebene dar, deren Punkte sämmtlich Mittelpunkte der Fläche des zweiten Grades sind, welche daher nichts anders als ein System von je zwei jener Centralebene parallelen und von derselben gleichweit entfernten Ebenen sein kann.

Da die beiden Ebenen in eine zusammenfallen oder imaginär sein können, so muß man die Fläche (1) durch eine Ebene schneiden, um zu erkennen, ob der Schnitt zwei zusammenfallende oder zwei imaginäre Geraden liefert.

§. 81. Wenn sich die drei Gleichungen (3) auf zwei reduciren, so stellen solche zwei Ebenen dar, und der Durchschnitt dieser beiden Ebenen ist eine Centrallinie unserer Fläche des zweiten Grades, welche daher nur, entweder ein elliptischer Cylinder oder ein hyperbolischer Cylinder oder ein System zweier nicht parallelen Ebenen sein kann. Um die Fläche näher kennen zu lernen, müssen wir sie durch eine auf der Centrallinie senkrecht stehende Ebene schneiden. Je nachdem sich der Schnitt als eine Ellipse, eine Hyperbel, ein System zweier sich schneidenden Geraden, oder imaginär herausstellt, ist die Fläche ein elliptischer Cylinder, ein hyperbolischer Cylinder, ein System zweier nicht parallelen Ebenen, oder imaginär.

Es ist übrigens einleuchtend, daß den Gleichungen (3) niemals ganz unabhängig von dem Werthe von α, β, γ Genüge gethan werden könne; denn sonst müßten alle Coefficienten der Gleichung (1) verschwinden, was nicht anzunehmen ist.

§. 82. Ist eine der drei Gleichungen (3) unmöglich, so hat die gegebene Fläche des zweiten Grades keinen Mittelpunkt; sie ist mithin entweder ein parabolischer Cylinder oder ein elliptisches Paraboloid, oder ein hyperbolisches Paraboloid. Für den parabolischen Cylinder ist der durch eine beliebige Ebene erzeugte Schnitt entweder eine Parabel, oder ein System zweier parallelen Geraden, oder eine Gerade. Als charakterisirendes Merkmal dieser Fläche gelten daher noch die Gleichungen:

$$b''^2 - aa' = 0,\quad b'^2 - aa'' = 0,\quad b^2 - a'a'' = 0.$$

§. 83. Bei dem elliptischen Paraboloid kann der Schnitt durch eine Ebene nie eine Hyperbel, bei dem hyperbolischen Paraboloid dagegen jener Schnitt nie eine Ellipse werden. Dasjenige der Binome

$$b''^2 - aa',\quad b'^2 - aa',\quad b^2 - a'a'',$$

welches nicht Null ist, muß also negativ für das elliptische, hingegen positiv für das hyperbolische Paraboloid sein.

§. 84. Folgende Beispiele mögen das Gesagte erläutern.

I. $x^2+4y^2+z^2+4yz-2zx-4xy+3x-6y-3z=0$.

Die 3 Mittelpunktsgleichungen reduciren sich auf eine einzige; folglich gehört die gegebene Gleichung einem System zweier parallelen Ebenen an. Schneidet man die Fläche durch die Coordinatenebene yx, so bekommt man für den Schnitt $x=\frac{4y-3}{2}\pm\frac{1}{2}$, d. h. zwei verschiedene Geraden. Auch ist die gegebene Gleichung mit

$$(x-2y-z)(x-2y-z+3)=0 \text{ gleichgeltend.}$$

II. $3x^2+y^2+2z^2-4xy+3yz-5xz+x-y-z+3=0$.

Die Mittelpunktsgleichungen reduciren sich auf zwei $2x=z-1$ und $2y=-z-1$. Die Fläche ist ein hyperbolischer Cylinder.

III. $x^2+y^2+9z^2+6yz-6zx-2xy+2x-4z=0$.

Zwei Mittelpunktsgleichungen führen auf eine Ungereimtheit, folglich hat die Fläche keinen Mittelpunkt. Das charakterisirende Merkmal

$$b^2-a'a''=0,\ b'^2-aa''=0,\ b''^2-aa'=0$$

findet hier statt; daher ist die Fläche ein parabolischer Cylinder.

IV. $x^2+3y^2+2z^2+2xy+4yz+3z+4y+3x=5$.

Die Coordinaten des Centrums sind unendlich. Die Fläche ist ein elliptisches Parabolid, weil der Schnitt durch die Ebene xz zur Gleichung hat:

$$x^2+2z^2+3z+3x=5,$$

welche offenbar einer Ellipse angehört.

Von den Berührungsebenen an den Flächen zweiten Grades.

§. 85. Legen wir durch einen auf irgend einer Fläche gegebenen Punkt mehrere Ebenen, so schneiden diese die Fläche in eben so vielen Curven, von denen jede in dem angenommenen Punkte eine bestimmte Berührungslinie hat. Der geometrische Ort aller dieser Tangenten ist im Allgemeinen eine Ebene, die sogenannte Berührungsebene oder Tangentialebene der Fläche in gedachtem Punkte, welcher der Berührungspunkt heißt. Wir werden im nächsten Bande, bei

Anwendung der Differentialrechnung auf die krummen Flächen, zeigen, daß dieser Satz für jede beliebige Fläche gilt, und hier nur seine Richtigkeit für die Flächen zweiter Ordnung nachweisen.

Es sei deshalb die Gleichung:

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2cx+2c'y+2c''z+d=0 \quad \ldots \; (1),$$

in welcher sämmtliche Flächen zweiten Grades begriffen sind. Ferner seien x', y', z' die bekannten Coordinaten eines ihrer Punkte; folglich:

$$ax'^2+a'y'^2+a''z'^2+2cx'+2c'y'+2c''z'+d=0 \quad \ldots \; (2).$$

Indem man diese Gleichung von der vorhergehenden abzieht, entsteht:

$$\left.\begin{array}{l} a(x^2-x'^2)+a'(y^2-y'^2)+a''(z^2-z'^2) \\ +2c(x-x')+2c'(y-y')+2c''(z-z')=0 \end{array}\right\} \ldots (3).$$

Nun hat die durch den gegebenen Punkt gezogene Gerade zu Gleichungen:

$$x-x'=\alpha(z-z'),\; y-y'=\beta(z-z') \quad \ldots \; (4),$$

welche, wenn man sie mit (3) combinirt, für den zweiten Durchschnittspunkt gedachter Geraden mit der Fläche geben werden:

$$a\alpha(x'+x)+a'\beta(y'+y)+a''(z'+z)+2c\alpha+2c'\beta+2c''=0 \quad \ldots \; (5).$$

Soll aber unsere Secante in eine Tangente übergehen, d. h. der zweite Durchschnittspunkt mit dem ersten zusammenfallen, so muß $x=x'$, $y=y'$ und $z=y'$ sein, was die Gleichung (5) in

$$a\alpha x'+a'\beta y'+a''z'+c\alpha+c'\beta+c''=0 \quad \ldots \; (6)$$

umwandelt. Es ist dies die erforderliche Bedingung, damit die Gerade eine Tangente an unsere Fläche werde. Da diese Gleichung aber zur Bestimmung der beiden Größen α und β nicht hinreicht, so bleibt eine davon willkührlich; es existiren mithin für jeden Punkt unzählig viele Geraden, welche dieselbe Eigenschaft besitzen. Eliminiren wir daher α und β aus dieser Gleichung mit Hülfe der Gleichungen (4), so wird das Resultat den geometrischen Ort aller dieser Tangenten angeben. Die Operation liefert:

$$(ax'+c)(x-x')+(a'y'+c')(y-y')+(a''z+c'')(z-z')=0,$$

oder, wenn man entwickelt und die Gleichung (2) mit in Verbindung bringt, (7)

$$(ax'+c)x+(a'y'+c')y+(a''z'+c'')z+cx'+c'y'+c''z'+d=0,$$

welche Gleichung offenbar eine Ebene darstellt.

Anmerkung. Man bemerke, daß in der Gleichung der Berührungsebene die Coefficienten der Veränderlichen nichts anders als die partiellen Derivirten des ersten Theils der Gleichung (2) sind, (siehe höhere Algebra §. 33); ein Umstand, der, wie wir in der Differentialrechnung sehen werden, bei allen Flächen statt hat.

§. 86. Die durch den Berührungspunkt auf die Tangentialebene gezogene Senkrechte heißt die Normale der Fläche. Die Gleichungen für die Normale der Flächen des zweiten Grades in dem Punkte x', y', z' sind von der Form;

$$x-x'=\alpha'(z-z'),\ y-y'=\beta'(z-z')\ \ldots\ (8),$$

wo das Senkrechtstehen auf der Tangentialebene nach §. 35 uns die zwei Bedingungsgleichungen:

$$\alpha'=\frac{ax'+c}{a''z'+c''},\ \beta'=\frac{a'y'+c'}{a''z'+c''}$$

gibt, welche die Werthe von α' und β' in (8) bestimmen.

§. 87. Für das durch $nx^2+my^2+lz^2=1$ dargestellte Ellipsoid z. B. ist die Gleichung der Berührungsebene;

$$nx'x+my'y+lz'z=1\ ;$$

und die Gleichungen der Normale sind:

$$x-x'=\frac{nx'}{lz'}(z-z'),\ y-y'=\frac{my'}{lz'}(z-z').$$

Für $m=l$, in welchem Fall das Ellipsoid in ein Rotationsellipsoid übergeht, verwandelt sich die letzte Gleichung in: $z'y=y'z$, aus welcher folgt, daß die Projection der Normale auf der Ebene yz durch den Ursprung geht. Es trifft also die Normale die Umdrehungsachse, eine Eigenschaft, die jeder Rotationsfläche zukommt.

Für die Kugel ist $l=n=m$, wodurch die Gleichungen der Normale $z'x=x'z$, $z'y=y'z$ werden, d. h. die Normale geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

§. 88. Die Gleichungen (2) und (7) können auch angewendet werden, wenn es sich darum handelt, an die gegebene Fläche zweiten Grades durch einen außerhalb derselben befindlichen Punkt p, dessen bekannte Coordinaten α, β, γ sind, eine Tangentialebene zu legen. Da diese Ebene nämlich durch den Punkt α, β, γ gehen soll,

so müssen dessen Coordinaten der Gleichung (7) Genüge leisten; wir haben daher zur Bestimmung des unbekannten Berührungspunktes x', y', z' die Gleichungen:

$$ax'^2+a'y'^2+a''z'^2+2cx'+2c'y'+2c''z'+d=0 \quad (2), \text{ und}$$
$$(ax'+c)\alpha+(a'y'+c')\beta+(a''z'+c'')\gamma+cx'+c'y'+c''z'+d=0, \text{ oder}$$
$$(a\alpha+c)x'+(a'\beta+c')y'+(a''\gamma+c'')z'+c\alpha+c'\beta+c''\gamma+d=0 \ldots (9).$$

Der gesuchte Berührungspunkt bleibt also unbestimmt, oder mit andern Worten, es gibt unzählig viele Berührungspunkte, mithin auch unzählig viele Berührungsebenen. Alle diese Berührungspunkte werden durch das gleichzeitige Zusammenbestehen der zwei Gleichungen (2) und (9) erhalten; ihr geometrischer Ort ist daher diejenige Curve, in welcher die Fläche (1) von der Ebene (9) geschnitten wird, folglich eine Curve vom zweiten Grade.

Denken wir uns jetzt in jeder der Tangentialebenen diejenige Gerade gezogen, welche den gegebenen Punkt p und den in derselben entsprechenden Berührungspunkt verbindet; so werden alle diese Geraden einen Berührungskegel der Fläche (1) bilden, dessen Scheitel in dem gegebenen Punkt p liegt, und zu welchem die erwähnte Linie vom zweiten Grade als Berührungscurve gehört.

§. 89. Lassen wir jetzt den Punkt p sich ändern, womit nothwendigerweise eine Aenderung der Ebene (9) verbunden ist, dabei aber diese letztere fortwährend durch einen gewissen Punkt q, dessen Coordinaten g, h und k sind, gehen; so gibt uns eine solche Annahme folgende Gleichung:

$$(a\alpha+c)g+(a'\beta+c')h+(a''\gamma+c'')k+c\alpha+c'\beta+c''\gamma+d=0, \text{ oder}$$
$$(ag+c)\alpha+(a'h+c')\beta+(a''k+c'')\gamma+cg+c'h+c''k+d=0 \ldots (10), \text{ oder}$$
$$\text{vielmehr } (ag+c)x+(a'h+c')y+(a''k+c'')z+cg+c'h+c''k+d=0,$$

welche offenbar den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte p darstellen wird, die den verschiedenen möglichen Lagen der Ebene (9) in Bezug auf den fixen Punkt q entsprechen.

Hieraus folgern wir, daß, wenn durch einen willkührlichen Punkt im Raume in einer Fläche zweiten Grades eine Reihe von schneidenden Ebenen gelegt wird, und dabei die Durchschnitte derselben mit jener Fläche als entsprechende Berührungscurven einer Reihe von Berührungskegeln angesehen werden, die Scheitel dieser Kegel sämmtlich in einerlei Ebene liegen.

§. 90. Und umgekehrt, wie für einen willkührlich angenommenen Punkt q jederzeit eine Ebene (10) angegeben werden kann, welche zu ihm in der eben ausgesprochenen Relation steht, existirt auch immer für jede beliebige Ebene im Raume (10) ein gewisser Punkt q, welcher zu derselben eine ähnliche Beziehung hat. Um den fraglichen Punkt zu individualisiren, brauchen wir bloß in der Gleichung (10) die Coordinaten g, h und k als unbekannt anzusehen und solche in der Art zu bestimmen, daß gedachte Gleichung mit jener der gegebenen Ebene identisch werde. Daraus ergibt sich der folgende, zu dem vorhergehenden reciproke Lehrsatz: Wenn einer Fläche zweiten Grades eine Reihe von Kegelflächen, deren Scheitel sämmtlich in einer und derselben Ebene im Raume liegen, umgeschrieben wird; so gehen alle Ebenen der Berührungscurven unserer Kegel mit der vorgelegten Fläche, durch einen und denselben Punkt.

Wegen dieser wechselseitigen Beziehung werden der Punkt q und die ihm entsprechende Ebene (10) Pol und Polarebene zu einander genannt.

§. 91. Unterwerfen wir die Ebene (9) außerdem der Bedingung daß sie noch durch einen zweiten Punkt q′, dessen Coordinaten g′, h′ und k′ sind, oder daß sie blos durch eine bestimmte Gerade m gehe; so wird der Punkt p sich gleichzeitig in der Ebene (10) und in einer zweiten Ebene (10)′ befinden, deren Gleichung aus der Gleichung (10) dadurch abgeleitet wird, daß man g, h, k in g′, h′ und k′ umwandelt; der fragliche Punkt p wird demnach auf der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie n dieser beiden Ebenen (10) und (10)′ liegen. Daraus entspringt folgender Lehrsatz:

Wenn der Scheitel eines Kegels, der einer Fläche zweiten Grades umgeschrieben ist, sich auf einer Geraden bewegt, so dreht sich die Ebene der Berührungscurve um eine Gerade; und umgekehrt, wenn die Ebene der Berührungscurve sich um eine Gerade dreht, so beschreibt der Scheitel des Berührungskegels eine Gerade.

Wegen dieser gegenseitigen Beziehung, in welcher unsere beiden Geraden zu einander stehen, nennt man die eine Polarlinie der andern.

§. 92. Durch eine gegebene Gerade $x=Az+\alpha$ und $y=Bz+\beta$, wo A, α, B, β als bekannte Größen zu betrachten sind, an die Fläche

zweiten Grades (1) eine Tangentialebene zu legen. Man hat, da der Berührungspunkt x', y', z' auf der Fläche (1) liegt, die Gleichung:

$$ax'^2+a'y'^2+a''z'^2+2cx'+2c'y'+2c''z'+d=0.$$

Der Umstand, daß die Tangentialebene die gegebene Gerade enthalten soll, gibt uns nach §. 33 folgende zwei Bedingungsgleichungen:

$$A(ax'+c)+B(a'y'+c')+a''z'+c''=0,$$
$$\alpha(ax'+c)+\beta(a'y'+c')+cx'+c'y'+c''z'+d=0.$$

Mit Hülfe dieser drei Gleichungen lassen sich die Werthe von x', y', z' bestimmen; es gibt eine Gleichung zweiten Grades, demnach im Allgemeinen zwei Tangentialebenen, welche die gegebene Gerade enthalten.

§. 93. An eine gegebene Fläche zweiten Grades (1) eine Tangentialebene, welche einer gegebenen Ebene $z=Ax+By+C$ parallel ist, zu legen. Nennen wir die Coordinaten des noch unbekannten Berührungspunktes x', y', z', so ist die Gleichung der Tangentialebene:

$$(ax'+c)x+(a'y'+c')y+(a''z'+c'')z+cx'+c'y'+c''z'+d=0.$$

Da die Tangentialebene der gegebenen Ebene parallel sein soll, so hat man nach §. 30 die Relationen:

$$A(a''z'+c'')+ax'+c=0,$$
$$B(a''z'+c'')+a'y'+c'=0.$$

Entwickeln wir aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung

$$ax'^2+a'y'^2+a''z'^2+cx'+c'y'+c''z'+d=0$$

die Werthe von x', y', z', so erhalten wir im Allgemeinen doppelte Werthe; wonach die Coordinaten von zwei Punkten der Fläche (1) bestimmt sind, in denen die Tangentialebene zu der gegebenen parallel ist.

§. 94. Wir wollen nun untersuchen, ob eine Tangentialebene an eine Fläche zweiter Ordnung mit dieser noch Punkte außer dem Berührungspunkt gemein haben kann. Es sei deshalb zuerst die Gleichung der Mittelpunktsflächen:

$$lz^2+my^2+nx^2=1 \;.\;.\;. \;(11),$$

welche einem Ellipsoid oder einem einfächerigen Hyperboloid, oder einem zweifächerigen Hyperboloid angehört, je nachdem die drei Coefficienten l, m, n sämmtlich positiv, oder zwei davon n und m, oder nur einer n es sind. Die Gleichung der Berührungsebene in dem Punkte x', y', z' der Fläche ist:

$$lz'z+my'y+nx'x=1 \ldots (12),$$

wo man außerdem für den Berührungspunkt hat:

$$lz'^2+my'^2+nx'^2=1 \ldots (13).$$

Um die der Ebene (12) und der Fläche (11) gemeinschaftlichen Punkte zu finden, müssen wir die drei vorhergehenden Gleichungen in der Art combiniren, daß daraus x, y oder z verschwinde. Wir ziehen zu dem Behufe das Doppelte der Gleichung (12) von der Summe der Gleichungen (11) und (13) ab, wodurch wir erhalten:

$$l(z-z')^2+m(y-y')^2+n(x-x')^2=0.$$

Subtrahiren wir ferner die Gleichung (13) von der Gleichung (12), so kommt:

$$lz'(z-z')+my'(y-y')+nx'(x-x')=0.$$

Die Elimination von $z-z'$ aus den beiden letzten Gleichungen gibt:

$$\left.\begin{array}{l}(m^2y'^2+mlz'^2)(y-y')^2+(n^2x'^2+nlz'^2)(x-x')^2 \\ \quad +2mnx'y'(y-y')(x-x')=0\end{array}\right\} \ldots (14),$$

welches Resultat die Projection der Curve ausdrückt, in der die Fläche von der Tangentialebene geschnitten wird. Um diese Gleichung besser zu discutiren, multipliciren wir alle ihre Glieder mit $m^2y'^2+mlz'^2$, was sie, wenn dabei die Gleichung (13) in Betracht gezogen wird, auf folgende Form bringt:

$$[(m^2y'^2+mlz'^2)(y-y')+mnx'y'(x-x')]^2+nlmz'^2(x-x')^2=0.$$

Haben nun die Größen l, m einerlei Zeichen, in welchem Falle die Fläche ein Ellipsoid oder ein zweifächeriges Hyperboloid ist, je nachdem jene Größen positiv oder negativ sind; so läßt sich unserer Gleichung nur Genüge thun durch $x=x'$ und $y=y'$; d. h. die Tangentialebene in einem Punkt x', y', z' hat mit der Fläche nur diesen Berührungspunkt gemeinschaftlich. Sind aber l und m von ent-

8 *

gegengesetztem Zeichen, z. B. l negativ und m positiv, so gibt uns unsere Gleichung:

$$y-y'=\frac{mnx'y'\mp z'\sqrt{nlm}}{mlz'^2-m^2y'^2}(x-x');$$

woraus folgt, daß das einfächerige Hyperboloid von der Tangentialebene nicht bloß im Punkte x', y', z', berührt, sondern auch davon in zwei durch diesen Punkt gehenden geraden Linien geschnitten wird.

§. 95. Es sei zweitens die Gleichung

$$my^2+lz^2=px) \ldots (15),$$

welche die Flächen zweiter Ordnung ohne Mittelpunkt darstellt. Sie ist ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid, je nachdem die Coefficienten m und l einerlei oder verschiedene Zeichen haben. Die Tangentialebene im Punkte x', y', z' dieser Flächen hat zur Gleichung;

$$my'y+lz'z=\frac{p}{2}(x+x') \ldots (16);$$

ferner ist für den Berührungspunkt:

$$my'^2+lz'^2=px' \ldots (17).$$

Indem wir das Doppelte der Gleichung (16) von der Summe der Gleichungen (15) und (17) abziehen, bekommen wir:

$$m(y-y')^2+l(z-z')^2=0 \ldots (18).$$

Diese Gleichung kann, wenn m und l einerlei Zeichen haben, nur durch $z=z'$ und $y=y'$ befriedigt werden. Die Tangentialebene hat daher mit dem elliptischen Paraboloid nur den Berührungspunkt gemeinschaftlich. Ist aber m positiv und l negativ, so finden wir

$$y-y' \pm \sqrt{\frac{1}{m}}(z-z'):$$

d. h. die Tangentialebene schneidet das hyperbolische Paraboloid in zwei durch den Berührungspunkt gehenden Geraden.

Von den schiefen conjugirten Diametralebenen.

§. 96. Bei den Flächen zweiter Ordnung, welche einen Mittelpunkt haben, und auf ihre Hauptebenen bezogen, durch $lz^2+my^2+nx^2=1$ dargestellt werden, sind diese rechtwinklig auf einander stehenden Ebenen

conjugirt mit einander. Wir wollen nun untersuchen, ob es hier noch andere conjugirte Diametralebenen gibt. Um diese Frage zu beantworten, bedienen wir uns der im §. 44 aufgeführten Transformationsformeln (A), welche angewendet werden, wenn es sich darum handelt, von einem System rechtwinkliger Achsen zu einem schiefwinkligen Achsensystem überzugehen.

Sind mithin x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Fläche, x', y', z' dagegen die schiefwinklichen Coordinaten desselben Punktes, bezeichnen ferner $X, Y, Z, X', Y', Z', X'', Y'', Z''$ die Cosinus der Winkel, welche die neuen Achsen mit den alten bilden; so haben wir die Formeln:

$$x = Xx' + X'y' + X''z',$$
$$y = Yx' + Y'y' + Y''z',$$
$$z = Zx' + Z'y' + Z''z',$$

mit welchen die drei folgenden Bedingungen verbunden werden müssen:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,\ X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 1,\ X''^2 + Y''^2 + Z''^2 = 1.$$

Es bleiben daher noch sechs Constanten übrig, über welche man nach Belieben verfügen kann. Substituiren wir nun die Werthe von x, y, z in die Gleichung der Fläche, so verwandelt sich dieselbe in:

$$l'z'^2 + m'y'^2 + n'x'^2 + 2ky'z' + 2k'x'z' + 2k''x'y' = 1.$$

Damit die drei Diametralebenen mit einander conjugirt werden, muß $k = k' = k'' = 0$ sein; es bleiben daher drei Constanten völlig unbestimmt, oder es gibt unzählig viele schiefe Diametralebenen, welche zu drei genommen, ein System conjugirter Ebenen bilden.

§. 97. Zu jeder Diametralebene einer Fläche zweiter Ordnung der ersten Klasse gehört ein conjugirter Diameter, welcher den durch diese Ebene halbirten Sehnen parallel ist. Ferner läuft die durch den Endpunkt dieses Diameters an unsere Fläche gelegte Berührungsebene zu jener Diametralebene parallel.

Um dies nachzuweisen, seien

$$x = \alpha z,\ y = \beta z \quad (1)$$

die Gleichungen eines Diameters, und

$$x = \alpha z + \alpha',\ y = \beta z + \beta' \quad (2)$$

die Gleichungen einer zu diesem Diameter parallelen Sehne.

Für den Durchschnittspunkt derselben mit der Fläche erhalten wir, wenn die Werthe von x und y aus (2) in die Gleichung der Fläche $lz^2+my^2+nx^2=1$ substituirt werden, ein Resultat von der Form:

$$Fz^2+2Gz+K=0, \text{ wo}$$
$$F=l+m\beta^2+n\alpha^2, \quad G=n\alpha\alpha'+m\beta\beta', \quad K=n\alpha'^2+m\beta'^2-1.$$

Für die Werthe Z und Z', der den Durchschnittspunkten der Sehne mit der Fläche angehörigen Ordinaten finden wir:

$$Z=-\frac{G}{F}+\sqrt{\left(\frac{G^2}{F^2}-\frac{K}{F}\right)}, \quad Z'=-\frac{G}{F}-\sqrt{\left(\frac{G^2}{F^2}-\frac{K}{F}\right)}.$$

Die Ordinate z der Mitte der Sehne ist

$$\frac{Z+Z'}{2}=-\frac{G}{F}, \text{ oder } z=-\frac{m\beta\beta'+n\alpha\alpha'}{l+m\beta^2+n\alpha^2} \quad \ldots (3).$$

Indem wir aus (3) mit Hülfe der Gleichungen (2) die, die Sehne particularisirenden, Größen α' und β' eliminiren, finden wir als Gleichung der Diametralebene:

$$zl+m\beta y+n\alpha x=0 \quad \ldots (4).$$

Der Diameter, welcher den durch diese Diametralebene halbirten Sehnen parallel ist, trifft die Fläche in den Punkten x', y', z' und, $-x'$, $-y'$, $-z'$, so daß $x'=\alpha z'$, $y'=\beta z'$; woraus

$$\alpha=\frac{x'}{z'}, \quad \beta=\frac{y'}{z'}.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gleichung (4) gibt:

$$lz'z+my'y+nx'x=0 \quad \ldots (5).$$

Die Zusammenstellung derselben mit der Gleichung

$$lz'z+my'y+nx'x=1 \quad \ldots (6),$$

welche der durch den Punkt x', y', z' an die Fläche gelegten Tangentialebene angehört, zeigt, daß die durch (5) dargestellte Diametralebene jener Tangentialebene parallel ist.

§. 98. Aus dem im vorhergehenden Paragraphen Gesagten folgern wir also, daß jede der drei mit einander conjugirten Diametralebenen einer Fläche zweiter Ordnung der ersten Klasse zu der Tangentialebene parallel läuft, welche durch den Endpunkt desjenigen Diameters, der die Durchschnittslinie der beiden andern conjugirten

Diametralebenen abgibt, an die Fläche gelegt worden ist. Da von den sechs auf ein System conjugirter Diametralebenen Bezug habenden Constanten drei willkührlich sind, so kann man solche dadurch bestimmen, daß man eine Diametralebene und einen darin enthaltenen Diameter nach Belieben wählt. Von den zwei Diametralebenen die mit der gegebenen conjugirt sind, ist dann die eine parallel zu der durch den Endpunkt des gegebenen Diameters an die Fläche gelegten Tangentialebene, während die zweite durch diesen und denjenigen Diameter geht, der, den durch die gegebene Diametralebene halbirten, Sehnen parallel läuft.

§. 99. Wir wollen jetzt zwei Eigenschaften der conjugirten Diameter bei den Flächen zweiter Ordnung der ersten Klasse nachweisen, Eigenschaften, welche denen der Quadrate und Parallelogramme bei der Ellipse und Hyperbel analog sind. Es seien a, b, c die halben Hauptachsen einer Fläche zweiten Grades, von denen alle reell oder auch einige imaginär sein können. Stellen nun (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') die Coordinaten der Endpunkte dreier beliebiger conjugirter Durchmesser dar, wobei die Hauptachsen als Coordinatenachsen gelten; so haben wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=1,\\ \frac{x'^2}{a^2}+\frac{z'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}&=1,\\ \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}&=1. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Sollen die neuen Diameter conjugirt zu einander sein, so muß die durch den Endpunkt eines jeden derselben an die Fläche gelegte Tangentialebene zu den beiden andern parallel laufen; was uns folgende Gleichungen liefert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}+\frac{z'z''}{c^2}&=0,\\ \frac{x''x}{a^2}+\frac{y''y}{b^2}+\frac{z''z}{c^2}&=0,\\ \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}&=0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Setzen wir der Kürze halber:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a}=X,\ \frac{y}{b}=Y,\ \frac{z}{c}=Z, \\ \frac{x'}{a}=X',\ \frac{y'}{b}=Y',\ \frac{z'}{c}=Z', \\ \frac{x''}{a}=X'',\ \frac{y''}{b}=Y'',\ \frac{z''}{c}=Z''; \end{array}\right\}\ (3)$$

so reduciren sich dadurch unsere vorstehenden Gleichungen auf:

$$\left.\begin{array}{l} X^2+Y^2+Z^2=1, \\ X'^2+Y'^2+Z'^2=1, \\ X''^2+Y''^2+Z''^2=1; \end{array}\right\}\ (4)\quad \left.\begin{array}{l} X'X''+Y'Y''+Z'Z''=0, \\ X''X+Y''Y+Z''Z=0, \\ XX'+YY'+ZZ'=0. \end{array}\right\}\ (5)$$

Eine nothwendige Folge dieser Systeme sind die nachstehenden Relationen (Siehe Note VIII):

$$X^2+X'^2+X''^2=1,\ Y^2+Y'^2+Y''^2=1,\ Z^2+Z'^2+Z''^2=1\ \ldots (6);$$

$$X(Y'Z''-Z'Y'')+Y(Z'X''-X'Z'')+Z(X'Y''-Y'X'')=1\ \ldots (7).$$

Führen wir statt X, Y, Z, X' . . . ihre Werthe aus (3) ein; so haben wir:

$$x^2+x'^2+x''^2=a^2,\ y^2+y'^2+y''^2=b^2,\ z^2+z'^2+z''^2=c^2\ \ldots (8);$$

$$x(y'z''-z'y'')+x'(zy''-yz'')+x''(yz'-zy')=abc\ \ldots (9).$$

Bezeichnen wir jetzt mit a', b', c' unsere drei halben conjugirten Diameter, ferner mit α, β, γ die Winkel, welche sie je zwei mit einander bilden; so ist offenbar:

$$x^2+y^2+z^2=a'^2,\ x'^2+y'^2+z'^2=b'^2,\ x''^2+y''^2+z''^2=c'^2\ \ldots (10)$$

Ferner nach Note V und II:

$$x(y'z''-z'y'')+x'(zy''-yz'')+x''(yz'-zy')=K=$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a'b'c'\sqrt{\sin\left[\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)\right.} \\ \qquad \overline{\left.\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\beta\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\gamma\right)\right]} \end{array}\right\}\ \ldots (11)$$

Durch Zusammenstellung der Summe der Gleichungen (8) und (10), und durch die der Gleichungen (9) und (11) entspringen folgende Resultate:

$$a^2+b^2+c^2=a'^2+b'^2+c'^2\ \ldots (12);$$

$$abc=2a'b'c'\sqrt{\left[\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)\right.}$$
$$\sqrt{\left.\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\beta\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\gamma\right)\right]}$$

Das erste zeigt, daß in einer Fläche erster Klasse die Summe der Quadrate von drei beliebigen conjugirten Diametern constant und gleich der Summe der Quadrate der drei Hauptachsen ist.

Wenn eine oder zwei Achsen imaginär sind, so sind von den drei conjugirten Durchmessern eben soviele imaginär; was eine Zeichenänderung der Quadrate dieser Achsen und Durchmesser in der Gleichung (12) nach sich zieht.

Aus dem zweiten Resultate folgt, daß der Inhalt des aus drei conjugirten Durchmessern construirten Parallelepipeds dem Inhalt des Parallelepipeds aus den Hauptachsen gleich ist.

§. 100. Die Flächen ohne Mittelpunkt haben in der auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Gleichung $lz^2+my^2-px=0$ ihre Darstellung. Die Gleichungen einer durch den Punkt $(x', y', z',)$ der Fläche gezogenen Secante, welche der Geraden $x=\alpha z$, $y=\beta z$ parallel läuft, sind nun:

$$x-x'=\alpha(z-z'),\ y-y'=\beta(z-z').$$

Diese Secante trifft die Fläche in einem zweiten Punkte x'', y'', z'', so daß wir folgende Gleichungen haben:

$$lz''^2+my''^2-px''=0,\ lz'^2+my'^2-px'=0, \text{ und}$$
$$x''-x'=\alpha(z''-z'),\ y''-y'=\beta(z''-z').$$

Indem man die zweite von der erstern abzieht, entsteht, wenn die beiden letzten dabei in Anschlag kommen:

$$l(z''+z')+m\beta(y''+y')-p\alpha=0.$$

Für die Mitte x, y, z der Sehne, welcher Punkt der Diametralebene angehört, die alle, in einer gewissen Richtung parallel gezogenen Sehnen halbirt, hat man aber offenbar:

$$\frac{z'+z''}{2}=z,\ \frac{y'+y''}{2}=y,\ \frac{x'+x''}{2}=x.$$

Durch Substitution dieser Werthe ergibt sich als allgemeine Gleichung für die Diametralebene:

$$lz+m\beta y-2p\alpha=0,$$

ein Resultat, welches zeigt, daß sämmtliche Diametralebenen einer Fläche der zweiten Klasse senkrecht auf der Ebene yz stehen. Ihre Durchschnitte, welche die Durchmesser der Fläche genannt werden, sind daher alle zur Achse der x parallel und können somit nicht zur Bildung eines Coordinatensystems verwandt werden, oder mit andern Worten, drei Diametralebenen können bei den Flächen der zweiten Klasse nie conjugirt unter sich sein.

§. 101. Will man aber ein schiefwinkliges Coordinatensystem erhalten, welches dem rechtwinkligen analog ist, d. h. von den zwei Ebenen, diametral und dergestalt gelegen sind, daß jede von ihnen die dem Durchschnitte der beiden andern Ebenen, parallelen Sehnen halbirt; so wähle man eine Diametralebene nach Belieben, und ziehe hierauf durch einen willkührlichen Punkt A' der Durchschnittsparabel derselben mit der Fläche, eine Linie $A'Z'$ parallel zu den mit der angenommenen Ebene conjugirten Sehnen. Die beiden andern Coordinatenebenen werden die angenommene Ebene in zwei Linien $A'X'$, $A'Y'$ schneiden, die so liegen müssen, daß die Gleichung der auf diese Geraden als Achsen bezogene Fläche von der Form $lz'^2+m'y'^2=p'x'$ ist. Indem man in dieser Gleichung $z'=0$ macht, hat man $m'y'^2=p'x'$; woraus folgt, daß von den Achsen $A'X'$, $A'Y'$ die eine ein Durchmesser der oben erwähnten Durchschnittsparabel und die andere die ihm entsprechende Berührende ist. Die Lage der zweiten Diametralebene $Z'A'X'$ und die der dritten Coordinatenebene $Z'A'Y'$ wäre hiernach bestimmt; auch sieht man, daß die nicht diametrale Ebene $Z'A'Y'$ die Fläche berührt, indem sie durch zwei Tangenten geht.

Viertes Kapitel.

Von einigen andern Flächen.

Flächen höherer Grade.

§. 102. Von dem Mittelpunkte eines Ellipsoids sind auf die Berührungsebenen dieser Flächen Senkrechte gefällt; man soll den geometrischen Ort der Fußpunkte dieser Senkrechten finden. Es sei die Gleichung unserer Fläche auf rechtwinklige Achsen bezogen:

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1;$$

mithin die Gleichung der Berührungsebene im Punkte x', y', z' der Fläche:

$$\frac{z'z}{c^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{x'x}{a^2}=1;$$

ferner die Gleichungen einer vom Mittelpunkte aus auf die Berührungsebene gefällten Senkrechten:

$$x=\frac{c^2x'}{a^2z'}z,\quad y=\frac{c^2y'}{b^2z'}z;$$

außerdem ist: $$\frac{z'^2}{c^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{x'^2}{a^2}=1.$$

Durch Elimination von x', y', z' zwischen den vier letzten Gleichungen entsteht:

$$(z^2+x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$$

als Gleichung der gesuchten Fläche, welche demnach von der vierten Ordnung ist. Der große Physiker Fresnel nennt diese Fläche, in seinen Untersuchungen über die doppelte Brechung des Lichtes die Elasticitätsfläche. Man vergleiche hiermit den Supplementband der Naturlehre von Baumgartner Seite 554, und Herschel vom Licht, Seite 561.

Schneiden wir die Elasticitätsfläche durch eine Ebene, so wird der Durchschnitt ein Kreis, wenn die Gleichungen:

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2 \ldots (1),$$
$$x^2+y^2+z^2=\varrho^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

für reelle Werthe von α, β, γ, ϱ gleichzeitig bestehen. Wird der Werth von z aus (3) in (2) und (1) substituirt, so kommt

$$(x^2+y^2)+\left(\frac{\alpha x+\beta y}{\gamma}\right)^2=\varrho^2 \text{ oder}$$
$$\gamma^2\varrho^2x^2+\gamma^2\varrho^2y^2+\varrho^2(\alpha x+\beta y)^2=\gamma^2\varrho^4, \text{ und}$$
$$a^2x^2+b^2y^2+c^2\left(\frac{\alpha x+\beta y}{\gamma}\right)^2=\varrho^4, \text{ oder}$$
$$\gamma^2a^2x^2+\gamma^2b^2y^2+c^2(\alpha x+\beta y)^2=\gamma^2\varrho^4. \text{ Hieraus}$$
$$\gamma^2\varrho^2x^2+\gamma^2\varrho^2y^2+\varrho^2(\alpha x+\beta y)^2=\gamma^2a^2x^2+\gamma^2b^2y^2+c^2(\alpha x+\beta y)^2;$$

was folgende Gleichungen liefert:

$$\varrho^2(\gamma^2+\alpha^2)=a^2\gamma^2+c^2\alpha^2,$$
$$\varrho^2(\gamma^2+\beta^2)=b^2\gamma^2+c^2\beta^2,$$
$$\varrho^2\alpha\beta=c^2\alpha\beta.$$

Demselben kann nicht anders Genüge geleistet werden, als wenn man entweder α oder β oder γ gleich Null setzt. Für $\alpha=0$ geht der Schnitt durch die Achse der x und man findet:

$$\varrho=a, \quad \frac{\beta}{\gamma}=\pm\sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{a^2-c^2}\right)}.$$

Der letzte Werth wird nur dann reell, wenn a zwischen b und c enthalten ist; woraus folgt, daß die Elasticitätsfläche nicht mehr als zwei Kreisschnitte zuläßt.

§. 103. Ein Ellipsoid, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ist, werde durch eine Reihe diametraler Ebenen $z=mx+ny$ geschnitten, worauf dann durch den Mittelpunkt auf jede dieser Ebenen Senkrechte, halb so lang als jede der Achsen des zugehörigen diametralen Schnittes, errichtet werden; man soll die Fläche, welche durch alle die auf diese Weise bestimmten Endpunkte geht, finden.

Zunächst haben wir die Größe der Achsen des Schnittes aufzusuchen; wir bedienen uns zu diesem Behufe der Transformationsformeln:

$$x = x' \cos\psi + y' \sin\psi \cos\vartheta,\ y = -x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta,\ z = y' \sin\vartheta,$$

wobei, mit Berücksichtigung der Gleichung der schneidenden Diametralebene $z = mx + ny$,

$$\sin\psi = \frac{m}{\sqrt{(m^2+n^2)}},\ \cos\psi = \frac{n}{\sqrt{(m^2+n^2)}},$$

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{(m^2+n^2)}}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}},\ \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}}$$ zu setzen ist.

Die Substitution dieser Werthe in die Gleichung des Ellipsoids gibt uns, wenn wir die Accente weglassen, die zu keiner weitern Unterscheidung mehr dienen, für die Gleichung des diametralen Schnitts:

$$x^2(b^2c^2n^2 + a^2c^2m^2) + y^2 \frac{[b^2c^2m^2 + a^2c^2n^2 + a^2b^2(m^2+n^2)^2]}{1+m^2+n^2}$$
$$+ 2xy \frac{(b^2c^2 - a^2c^2)mn}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}} = a^2b^2c^2(m^2+n^2).$$

Wird diese Gleichung mit der folgenden, aus der analytischen Geometrie §. 140 entlehnten:

$$(B^2 - 4AC)r^4 - 4Qr^2(A+C) = 4Q^2,$$

wo r die große und kleine Halbachse des elliptischen Schnitts bedeutet, zusammengestellt; so erhalten wir nach einigen Reductionen, zur Bestimmung der großen und kleinen Halbachse r unseres Schnitts die Gleichung:

$$r^4(c^2 + b^2n^2 + a^2m^2) - r^2(b^2c^2 + a^2c^2 + b^2c^2n^2 + a^2c^2m^2 + a^2b^2m^2 + a^2b^2n^2)$$
$$+ a^2b^2c^2(1+m^2+n^2) = 0,$$ oder
$$a^2m^2(r^2-c^2)(r^2-b^2) + b^2n^2(r^2-a^2)(r^2-c^2) + c^2(r^2-a^2(r^2-b^2) = 0.$$

Die Gleichungen der aus dem Mittelpunkt auf der Schnittebene errichteten Senkrechten sind $x = -mz$ und $y = -nz$; woraus $m = -\frac{x}{z}$, und $n = -\frac{y}{z}$. Substituirt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung, so kommt:

$$a^2x^2(r^2-b^2)(r^2-c^2) + b^2y^2(r^2-a^2)(r^2-c^2) + c^2z^2(r^2-a^2(r^2-b^2) = 0.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man die Multiplication verrichtet,

dabei erwägt, daß $x^2+y^2+z^2=r^2$ und dann den gemeinschaftlichen Faktor $x^2+y^2+z^2$ wegläßt:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-a^2(b^2+c^2)x^2-b^2(a^2+c^2)y^2 \\ -c^2(a^2+b^2)z^2+a^2b^2c^2=0$$

als Gleichung der gesuchten Fläche.

Sie ist von der vierten Ordnung, besteht aus zwei unterschiedenen Flächen und heißt die **Wellenfläche**. Man vergleiche hiermit abermals **Baumgartners** Supplementband der Naturlehre, Seite 562 und Herschel vom Licht, Seite 567.

Machen wir in der Gleichung der Wellenfläche successiv $x=0$, $y=0$, $z=0$; so finden wir, daß die Coordinatenebenen dieselbe in einem Kreise und einer Ellipse schneiden, deren Gleichungen sind:

für die Ebene yz . . . $\begin{cases} z^2+y^2-a^2=0, \\ b^2y^2+c^2z^2-b^2c^2=0; \end{cases}$

für die Ebene xz . . . $\begin{cases} x^2+z^2-b^2=0, \\ a^2x^2+c^2z^2-a^2c^2=0; \end{cases}$

für die Ebene yx . . . $\begin{cases} x^2+y^2-c^2=0, \\ a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2=0, \end{cases}$

Andererseits finden wir für die Durchschnitte des Ellipsoids mit den Coordinatenebenen:

in der Ebene yz: $c^2y^2+b^2z^2-b^2c^2=0$,
in der Ebene xz: $c^2x^2+a^2z^2-a^2c^2=0$,
in der Ebene xy: $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$.

Aus der Zusammenstellung dieser beiden Resultate folgt:

1. daß der elliptische Schnitt in der Wellenfläche und der in dem Ellipsoid eine und dieselbe Ellipse sind, dergestalt aber, daß die große Achse des einen Schnittes auf der kleinen Achse des andern liegt, und umgekehrt;

2. daß der Kreisschnitt diejenige Achse des Ellipsoids, welche senkrecht auf der Ebene dieses Kreisschnittes ist, zum Durchmesser hat.

Ist $b=c$, so läßt sich die Gleichung der Wellenfläche unter folgende Form bringen:

$$(x^2+y^2+z^2-b^2)(a^2x^2+b^2(y^2+z^2)-a^2b^2)=0,$$

welche das Product der Gleichung einer Kugel in die eines Rotationsellipsoids ist.

Ist endlich $a=b=c$, so reducirt sich die Gleichung auf

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0,$$

d. h. auf die einer Kugelfläche.

§. 104. Man soll die Gleichung der Fläche finden, welche durch die Bewegung einer Horizontallinie erzeugt wird, indem diese der Achse Az entlang über einer Ellipse hingleitet, deren Mittelpunkt O in der Achse der x liegt, und deren beide Achsen zu den Coordinatenachsen Ay und Az parallel laufen. Ist $AO=a$, ferner b und c die Halbachse der Leitellipse; so hat man für die Gleichungen derselben:

$$x=a,\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Combinirt man dieselbe mit den Gleichungen der Erzeugungslinie, nämlich mit $z=\beta$, $y=\alpha x$, um x, y, z zu eliminiren, so findet man die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\alpha^2 a^2}{b^2}+\frac{\beta^2}{c^2}=1.$$

Eliminirt man hierauf α und β, so erhält man:

$$\frac{c^2a^2}{b^2}\,y^2=x^2(c^2-z^2)$$

als Gleichung der Fläche, welche öfters zu Gewölben über Thoren benützt wird. Die Durchschnitte der mit der Coordinatenebene yz parallel laufenden Ebenen sind Ellipsen, denen sämmtlich eine verticale Achse von constanter Größe zukommt. Die Schnitte mit Ebenen, welche zu xz parallel laufen, stellen Curven von der vierten Ordnung dar.

Transscendente Flächen.

§. 105. Eine Fläche, deren Gleichung in Bezug auf ein rechtwinkliches oder schiefwinkliges Achsensystem keine algebraische ist oder keine solche werden kann, heißt eine transscendente.

Ebenso heißt eine Linie, wovon eine oder mehrere Projectionen transscendente Curven sind, eine transscendente.

Um nur ein Beispiel von einer solchen Fläche zu geben, wollen wir die Gleichung derjenigen suchen, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt wird, die an der Achse der z hingleitend, fortwährend der Ebene xy parallel bleibt und dabei durch eine Schraubenlinie geht, d. h. jene Curve, welche durch die Herumwickelung der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks auf der Oberfläche eines Cylinders mit kreisförmiger Basis entsteht, deren Umfang der Grundlinie des Dreiecks gleich ist.

Ist r der Halbmesser der Basis und die Achse des Cylinders zugleich die Achse der z, ferner h die Höhe des aufgewickelten Dreiecks, und ϑ der Bogen auf der Basis, welcher irgend einem Punkte x, y, z der Schraubenlinie entspricht; so hat man, wenn die Achse der y durch den Punkt geht, wo die Schraubenlinie die Basis trifft, folgende Gleichungen:

$$x^2+y^2=r^2,\quad x=r^2\sin\frac{\vartheta}{r},\quad z=\frac{h}{2\pi r}\vartheta,$$

weil die verticalen Ordinaten z den krummlinigen Abscissen auf der Cylinderbasis, deren Anfangspunkt im Durchschnitt der Schraubenlinie mit dieser Basis liegt, proportionirt sind, und die Ordinate h der Abscisse $\vartheta=2\pi r$ zukommt. Die gesuchte Fläche wird die Eigenschaft haben, daß sie von jeder durch die Achse der z gelegten Ebene in einer der Ebene der xy parallelen Geraden geschnitten wird. Die Gleichung der letztern ist aber $z=\beta$ und die der erwähnten Ebene $y=\alpha x$. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen und den beiden folgenden:

$$x^2+y^2=r^2,\quad x=r\sin\frac{\vartheta}{r}=r\sin\frac{2\pi z}{h}$$

die Veränderlichen x, y, z; so erhält man die Bedingungsgleichung:

$$\sqrt{(1+\alpha^2)}\,\sin\cdot\frac{2\pi\beta}{h}=1.$$

Setzt man endlich in dieselbe z statt β und $\frac{y}{x}$ statt α, so ergibt sich $\sin\cdot\frac{2\pi z}{h}=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ für die Gleichung unserer Fläche, welche z. B. die Wendeltreppen bilden und die deshalb Wendelfläche heißt.

Noten zur analytischen Geometrie im Raume.

Note I zu §. 1.

Unter allen Kreisbogen, welche man auf der Kugel zwischen zwei Punkten ziehen kann, ist der des größten Kreises der kürzeste.

1. Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir die im §. 183 der höhern Algebra angeführte Reihe zu Hülfe, nämlich:

$$x = \tang x - \tfrac{1}{3}\tang^3 x + \tfrac{1}{5}\tang^5 x - \tfrac{1}{7}\tang^7 x \ldots,$$

wodurch der Bogen mittelst seiner Tangente bestimmt wird. Nun ist aber $\sin x\,(1-\sin^2 x)^{-1/2} = \tang x$; wird dieser Werth statt $\tang x$ in die vorhergehende Reihe eingeführt und entwickelt, so ergibt sich folgende Reihe:

$$x = \sin x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\sin^7 x}{7} + \text{ꝛc.}$$

2. Dies vorausgeschickt, denken wir uns jetzt durch zwei Punkte auf der Kugel einen größten Kreisbogen vom Halbmesser r und einen Bogen eines beliebigen kleinern Kreises vom Halbmesser ϱ gelegt; die Länge des erstern werde mit a, die des zweiten mit α, ferner die Länge der gemeinschaftlichen Sehne mit c bezeichnet.

Für die Länge von $\frac{a}{2}$ in Theilen des Halbmessers r haben wir nun den Ausdruck:

$$\frac{a}{2} = \sin\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3\frac{1}{2}a}{3r^2} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^5\frac{1}{2}a}{5r^4} + \text{ꝛc.}$$

Es ist aber $\sin\frac{a}{2} = \frac{c}{2}$;

folglich: $$\frac{a}{2}=\frac{c}{2}+\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{c^3}{2^3r^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}\cdot\frac{c^5}{2^5r^4}+ \text{rc.}$$

Für den Bogen α, der die nämliche Sehne und den Halbmesser ϱ hat, finden wir ebenso:

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{c}{2}+\frac{1}{2\cdot3}\,\frac{c^3}{2^3\varrho^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}\cdot\frac{c^5}{2^5\varrho^4}+ \text{rc.}$$

Aus der Zusammenstellung dieser beiden letzten Reihen ergibt sich sofort, daß für $r>\varrho$ der Bogen a kleiner als α ist. Unter allen Kreisbogen, die man auf einer Kugel durch zwei Punkte legen kann, hat aber der größte Kreis den größten Halbmesser; mithin ist auch der dazu gehörige Bogen a der kleinste von allen.

3. Außer diesem eben betrachteten Bogen eines größten Kreises ist dessen Ergänzung zur ganzen Peripherie gleichfalls ein Bogen zwischen den beiden Punkten auf der Kugel. Dieser Bogen ist nun unter allen, die man durch jene Punkte legen kann, der größte. Denn der größte Kreis ist größer als jeder andere Kugelkreis; nun ist aber der eine Theil des ganzen größten Kreises kleiner als der eine Theil jedes andern Kugelkreises, mithin ist der zweite Theil des größten Kreises größer als der Bogen jedes kleinern Kugelkreises.

4. Die wahre Entfernung zweier Punkte auf der Kugel wird also durch den kleinern Bogen des durch denselben gelegten größten Kreises angegeben.

Note II zu §. 8.

Aufgaben über das schiefwinklige Parallelepiped.

1. Aus den drei Kanten a, b, c eines schiefen Parallelepipeds AB CD EF GH (Fig. 25) und den Winkeln α, β, γ, welche diese Linien mit einander bilden, seinen cubischen Inhalt V zu bestimmen.

Es sei HO senkrecht auf der Basis ABCD, ferner $\alpha'\beta'\gamma'$ ein sphärisches Dreieck, dessen drei Seiten, die den gegebenen Kantenwinkeln entsprechenden Bogen sind. Man hat:

$$V=ab\sin\alpha\cdot \text{Höhe HO}=abc\sin\alpha\cdot\sin HAO.$$

Das bei δ' rechtwinklige sphärische Dreieck $\alpha'\gamma'\delta'$ gibt aber:

$$\sin HAO=\sin\alpha'\delta'=\sin\beta\sin\gamma'.$$

Nun ist $$\sin\tfrac{1}{2}\gamma'=\sqrt{\left\{\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\beta\right)}{\sin\alpha\sin\beta}\right\}}$$

und $$\cos\tfrac{1}{2}\gamma' = \sqrt{\left\{\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\gamma\right)}{\sin\alpha\sin\beta}\right\}};$$

hieraus $$\sin\gamma' = \frac{2}{\sin\alpha\sin\beta}\times$$

$$\sqrt{\left[\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\beta\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\gamma\right)\right]}.$$

Substituirt man diesen Werth in den Ausdruck von $\sin HAO$, so hat man:

$$\sin HAO = \frac{2}{\sin\alpha}\times$$

$$\sqrt{\left[\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\beta\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\gamma\right)\right]}.$$

Folglich $V = 2abc$

$$\sqrt{\left[\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\beta\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\gamma\right)\right]}.$$

2. Es läßt sich dieser Ausdruck auch noch anders schreiben, wenn man erwägt, daß nach Buch IV. Seite 41. Formel (6)

$$2\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha - \cos(\beta+\gamma), \text{ und}$$

$$2\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\beta\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\alpha\right) = \cos(\beta-\gamma) - \cos\alpha;$$

mithin $$4\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\beta\right)\times$$

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\gamma\right) = [\cos\alpha - \cos(\beta+\gamma)][\cos(\beta-\gamma) - \cos\alpha]$$

$$= 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta\cos^2\gamma + \sin^2\beta\sin^2\gamma$$

$$= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma.$$

Also $V = abc\sqrt{(1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma)}$.

3. Den Winkel HAC, welchen die Kante HA mit der Diagonale AC macht, zu berechnen.

Das sphärische Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ gibt:

$$\cos\beta' = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma};$$

Das sphärische Dreieck $\alpha'\beta'\varepsilon'$ liefert:

$$\cos\alpha'\varepsilon' = \cos\gamma\cos\beta'\varepsilon' + \sin\gamma\sin\beta'\varepsilon'\cos\beta',$$

9 *

oder, wenn man für $\cos\beta'$ seinen obigen Werth setzt,

$$\cos\alpha'\varepsilon' = \cos\gamma\cos\beta'\varepsilon' + \sin\beta'\varepsilon' \frac{(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma)}{\sin\alpha}.$$

Aus dem ebenen Dreieck ACD findet man aber:

$$\sin DAC = \sin\beta'\varepsilon' = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{(a^2+b^2+2ab\cos\alpha)}}; \text{ folglich}$$

$$\cos\beta'\varepsilon' = \frac{b + a\cos\alpha}{\sqrt{(a^2+b^2+2ab\cos\alpha)}}.$$

Durch Substitution dieser Werthe von $\sin\beta'\varepsilon'$ und $\cos\beta'\varepsilon'$ ergibt sich dann:

$$\cos\alpha'\varepsilon' = \cos HAC = \frac{a\cos\beta + b\cos\gamma}{\sqrt{(a^2+b^2+2ab\cos\alpha)}};$$

ferner erhält man:

$$\sin\alpha'\varepsilon' = \sin HAC = \sqrt{\left(\frac{a^2\sin^2\beta + b^2\sin^2\gamma + 2ab(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)}{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\right)}.$$

4. Die Neigung des Diagonalschnitts ACFH gegen die Basis zu bestimmen.

Das sphärische Dreieck $\beta'\alpha'\varepsilon'$ gibt:

$$\cos\varepsilon' = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha'\varepsilon'\cos\beta'\varepsilon'}{\sin\alpha'\varepsilon'\sin\beta'\varepsilon'}.$$

Werden für $\cos\alpha'\varepsilon'$, $\cos\beta'\varepsilon'$, $\sin\alpha'\varepsilon'$, $\sin\beta'\varepsilon'$ die vorhin gefundenen Werthe substituirt, so erhält man:

$$\cos\varepsilon' = \frac{a\cos\gamma - b\cos\beta - \cos\alpha(a\cos\beta - b\cos\gamma)}{\sin\alpha\sqrt{[a^2\sin^2\beta + b^2\sin\gamma + 2ab(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)]}}.$$

Um Aehnliches in dem Diagonalschnitt EGDB zu berechnen, braucht man bloß die Ecke D statt der Ecke A zu nehmen, mithin $180^0 - \alpha$ für α, und $180^0 - \gamma$ für γ zu setzen.

Note III zu §. 12.

Berechnung des Flächeninhalts eines sphärischen Dreiecks.

1. Die auf der Kugel von zwei größten Halbkreisen ADH und AEH (Fig. 26) begrenzte Fläche AEHDA, welche wir ein sphärisches Zweieck nennen wollen, verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie sich der sphärische Winkel DAE des Zweiecks zu vier Rechten verhält. Der Beweis dieses Satzes ist leicht, und wird, es mag der Winkel EAD commensurabel oder incommensurabel zu einem Rechten sein, gerade so

geführt, wie es in den Elementen der Geometrie für ähnliche Fälle geschieht. Bezeichnen wir demnach gedachte Fläche mit Z, den sphärischen Winkel EAD mit α die Kugelfläche mit K; so haben wir $Z = K \cdot \frac{\alpha}{4R}$. Ist der sphärische Winkel EAD ein rechter, hat mithin das sphärische Dreieck EAD drei rechte Winkel; so macht dasselbe den achten Theil der Kugelfläche aus. Indem nun diese Fläche zur Flächeneinheit und der rechte Winkel als Einheit der Winkel angenommen wird, ergibt sich für die obige Fläche Z unsers Zweiecks der Ausdruck: $Z = 2\alpha$.

2. Es sei jetzt ABC ein sphärisches Dreieck, in welchem die Winkel durch A, B, C, und die Fläche durch F dargestellt werden sollen. Verlängern wir die drei Seiten AB, AC und BC, bis sie sich abermals schneiden und bezeichnen wir die dadurch entstandenen Flächenräume der drei Zweiecke ABHCA, BAGCB, CALBC respectiv mit Z, Z′, Z″; so haben wir folgende Gleichungen:

$$Z = F + \text{Dr. } BCH = 2A,$$
$$Z' = F + \text{Dr. } ACG = 2B,$$
$$Z'' = F + \text{Dr. } ABL = 2C.$$

Setzen wir an die Stelle des Dreiecks ABL das ihm gleichgeltende, auf der entgegengesetzten Halbkugel liegende Dreieck CGH, und addiren dann die vorigen Gleichungen Glied für Glied, erwägend daß

$$\text{Dr. } ABC + \text{Dr. } BCH + \text{Dr. } CGH + \text{Dr. } ACG$$

die vor der Ebene AFHD liegende halbe Kugelfläche ausmachen; so erhalten wir:

$$F = A + B + C - 2.$$

Die Berechnung des Flächeninhalts eines sphärischen Dreiecks beruht hiernach lediglich auf der Bestimmung des Ueberschusses der Summe seiner drei Winkel über zwei rechte Winkel. Diesen Ueberschuß der Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks über zwei rechte Winkel nennt man seinen sphärischen Exces, so daß also, wenn der Exces durch e bezeichnet wird, man hat

$$F = A + B + C - 2 = e:$$

so oft mithin der rechte Winkel in diesem sphärischen Exces enthalten ist, so oft ist auch das Dreieck mit drei rechten Winkeln in dem betreffenden Dreiecke enthalten.

Sind die Winkel A, B, C in Graden angegeben, so muß man in

der vorigen Gleichung für A, B, C respectiv $\frac{A}{90}$, $\frac{B}{90}$, $\frac{C}{90}$ setzen; hierdurch erhält sie folgende Form:

$$F = \frac{A+B+C-180}{90}.$$

Soll endlich F durch den Radius der Kugel, auf welcher das sphärische Dreieck liegt, ausgedrückt werden, so muß man den vorigen Ausdruck von F mit $\frac{1}{2}r^2\pi$, dem Flächeninhalte des sphärischen Octanten multipliciren. Hierdurch entsteht:

$$F = \frac{(A+B+C-180)}{180} r^2 \pi.$$

3. Will man die hier in Betracht genommenen symmetrisch liegenden Dreiecke CGH und ABL vermeiden, so kann man den für den Flächeninhalt oben angegebenen Ausdruck nach Grunert auch auf folgende Art beweisen.

Es sei vorerst ABC (Fig 27) ein gleichschenkliges sphärisches Dreieck, und zwar AB, AC die gleichen Seiten. Wird der Kreis, von dem die Basis einen Theil ausmacht, vollendet, ferner die gleichen Seiten zu Halbkreisen ergänzt, und endlich dieselben über A hinaus bis zu dem Basiskreis verlängert; so hat man AB′=A′B, A′C=A′C; desgleichen AB′=AC′, A′B=A′C und offenbar Winkel B′AC′=BA′C. Hieraus folgt, daß die Dreiecke A′BC und AC′B′ einander gleich sind und jederzeit zur Deckung gebracht werden können. Stellen wir nun die Flächeninhalte der sphärischen Dreiecke ABC, A′BC, ACB′, ABC′ beziehungsweise durch F, f, f′, f″ dar; so haben wir:

$$F+f=2A,\ F+f'=2B,\ F+f''=2C.$$

Daraus entsteht, weil $F+f+f'+f''$ = Oberfläche der Halbkugel $=4$,

$$F=A+B+C-2.$$

4. Es sei nun ABC (Fig. 28) ein ungleichseitiges sphärisches Dreieck, F sein Flächeninhalt, BC seine größte Seite. Man mache BB′=BA und CC′=CA; die Punkte B′ C′ bekommen, wegen BC<AB+AC, jederzeit die in der Figur angegebene Lage. Für die Flächeninhalte Δ, Δ' der gleichschenklichen Dreiecke ABB′ und ACC′ bestehen nach dem eben Erwiesenen die Ausdrücke:

$$\Delta=\alpha+\beta+\beta'+B-2,\ \Delta'=\alpha+\gamma+\gamma'+C-2;$$

woraus durch Addition entspringt:

$$F+\triangle AB'C'=A+B+C+\alpha+\beta'+\gamma'-4,$$

oder, wenn wir die Summe der Winkel A, B, C durch S, den Flächeninhalt des Dreiecks AB′C′ durch φ und die Summe seiner Winkel durch Σ bezeichnen:

$$F+\varphi=S+\Sigma-4.$$

Verfahren wir mit dem Dreiecke φ gerade so, wie wir mit dem Dreiecke F gethan, und stellen das dadurch entstandene Dreieck durch φ_1 die Summe seiner Winkel durch Σ, dar; so haben wir:

$$\varphi+\varphi_1=\Sigma+\Sigma_1-4.$$

Indem dieses Dreieck φ_1 und das dadurch erhaltene φ_2 gleicherweise behandelt werden, und dies so weiter fortgesetzt wird, ergibt sich folgende Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned} F+\varphi&=S+\Sigma-4\\ \varphi+\varphi_1&=\Sigma+\Sigma_1-4\\ \varphi_1+\varphi_2&=\Sigma_1+\Sigma_2-4\\ \varphi_2+\varphi_3&=\Sigma_2+\Sigma_3-4\\ \varphi_3+\varphi_{,}&=\Sigma_3+\Sigma_4-4. \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten entspringt durch Subtraction

$$F-\varphi_1=S-\Sigma_1;$$

Addirt man hierzu die dritte Gleichung, so kommt:

$$F+\varphi_2=S+\Sigma_2-4.$$

Subtrahirt man hiervon die vierte Gleichung, so ist:

$$F-\varphi_3=S-\Sigma_3;$$

Addirt man hierzu die fünfte Gleichung, so entsteht:

$$F+\varphi_4=S+\Sigma_4-4;\ \text{u. s. w.}$$

Ueberhaupt hat man für jede positive ganze Zahl n folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} F-\varphi_{2n-1}&=S-\Sigma_{2n-1},\\ F+\varphi_{2n}&=S+\Sigma_{2n}-4; \end{aligned}$$

oder wenn man addirt,

$$2(F-S+2)=(\varphi_{2n-1}-\varphi_{2n})+(\Sigma_{2n}-\Sigma_{2n-1}).$$

Die Größen φ_{2n-1} und φ_{2n} nähern sich aber immer mehr der Null und können, in dem Maße daß n wächst, derselben so nahe gebracht

werden, als man nur immer will. Ebenso haben, weil der rechte Winkel als Einheit gilt, die Größen Σ_{2n} und Σ_{2n-1} die Zahl 2 zur Grenze, der sie bis zu jedem beliebigen Grade nahe kommen können. Da nun der zweite Theil unserer vorhergehenden Gleichung sich mit dem Wachsen von n fortwährend der Null nähert, der erste Theil aber lauter constante Größen enthält; so muß nach §. 22 der niedern Algebra

$$F-S+2=0, \text{ oder } F=A+B+C-2 \text{ sein.}$$

Note IV zu §. 12.

Auflösung sphärischer Dreiecke, deren Seiten in Bezug auf den Kugelhalbmesser sehr klein sind.

1. Es seien A, B, C die Winkel und a, b, c die gegenüberliegenden Seiten eines, auf der mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugel liegenden, sphärischen Dreiecks, wobei wir voraussetzen, daß a, b, c, r in einem gewissen Längenmaße, z. B. in Metern ausgedrückt sind. Die Quotienten $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ stellen alsdann die Seiten eines, auf der mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kugel liegenden, sphärischen Dreiecks dar, und man hat der Fundamentalformel zufolge:

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cdot\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\cdot\sin\frac{c}{r}}.$$

Sind nun die Seiten a, b, c sehr klein im Verhältniß zum Halbmesser r, so kann man in den bekannten Entwickelungen für $\cos x$ und $\sin x$ alle diejenigen Glieder der sehr kleinen Größen $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$, welche die vierte Potenz übersteigen, vernachläßigen. Hiernach entsteht:

$$\cos\frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{2\cdot3\cdot4\,r^4},$$

$$\cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{2\cdot3\cdot4\,r^4},$$

$$\cos\frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{2\cdot3\cdot4\,r^4};$$

$$\sin\frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{2\cdot3\cdot r^3}, \quad \sin\frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c_3}{2\cdot3\,r^3}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in den Ausdruck für $\cos A$, ergibt sich, wenn man wieder nur die Glieder beibehält, welche in Bezug

auf die kleinen Größen $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ die vierten Potenzen nicht übersteigen, das Resultat:

$$\cos A = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1-\frac{b^2}{6r^2}-\frac{c^2}{6r^2}\right)};$$

oder, wenn man Zähler und Nenner dieses Bruches mit

$$\left(1+\frac{b^2}{6r^2}+\frac{c^2}{6r^2}\right)$$

multiplicirt, die durch den Bruch angedeutete Division ausführt, und wieder alle Glieder, welche in Bezug auf $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ von einer höhern Potenz, als der vierten sind, wegläßt:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bcr^2} \quad (1).$$

2. Ist nun A′B′C′ ein ebenes Dreieck, welches mit dem sphärischen gleiche Seiten a, b, c hat; so ist, wenn A′, B′, C′ die ebenen Winkel jenes Dreiecks sind:

$$\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

folglich $$\sin^2 A' = \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2}.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung (1) substituirt, so nimmt sie die Form an:

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc\sin^2 A'}{6r^2} \ldots (2);$$

dieser Ausdruck zeigt, daß der Winkel A zwar größer als A ist, jedoch von demselben nur wenig abweicht. Man setze $A = A' + x$, wo x eine sehr kleine Größe ist, so daß man $\sin x = x$ und $\cos x = 1$ nehmen darf.

Unter solchen Annahmen erhält man:

$$\cos A = \cos(A'+x) = \cos A' - x\sin A'.$$

Wird dieser Werth in die Gleichung (2) substituirt, so findet man daraus:

$$x = \frac{bc}{6r^2}\sin A'.$$

3. Bezeichnet nun F den Flächeninhalt des ebenen Dreiecks, welchen man im vorliegenden Falle mit jenem des spärischen Dreiecks verwechseln darf; so ist $F=\frac{bc}{2}\sin A'$, und man erhält

$$A=A'+\frac{F}{3r^2}.$$ Eben so hat man:

$$B=B'+\frac{F}{3r^2},$$

$$C=C'+\frac{F}{3r^2}.$$

4. Addirt man die drei letzten Gleichungen, so kommt

$$A+B+C-2=\frac{F}{r^2}$$; woraus folgt, daß $\frac{F}{r^2}$ dem sphärischen Exces e gleich ist. Es lassen sich demnach die vorigen Gleichungen auch so schreiben:

$$A=A'+\tfrac{1}{3}e,$$

$$B=B'+\tfrac{1}{3}e,$$

$$C=C'+\tfrac{1}{3}e.$$

Hieraus ergibt sich folgender merkwürdige, von Legendre zuerst angegebene Satz:

Einem sphärischen Dreiecke ABC, dessen Seiten a, b, c gegen den Kugelhalbmesser r sehr klein sind, entspricht allemal ein ebenes Dreieck $A'B'C'$, das mit dem sphärischen Dreiecke gleiche Seiten hat; man findet die Winkel A', B' C', dieses ebenen Dreiecks, indem man jeden correspondirenden sphärischen Winkel A, B, C um den dritten Theil des sphärischen Excesses vermindert.

Note V zu §. 31 und 37.

Die unten ausgesprochene, von Lagrange zuerst erwiesene Relation über das Dreieck und dessen Projectionen aus den Constanten einer durch drei gegebene Punkte gelegten Ebene hergeleitet.

1. Es hat diese Ebene eine Gleichung von der Form $Lx+My+Nz=K$; sind nun x', y', z' die Coordinaten des ersten, x'', y'', z'' die Coordinaten des zweiten und x''', y''', z''' die des dritten Punktes, so haben wir:

$$Lx'+My'+Nz'=K,$$

$$Lx''+My''+Nz''=K,$$

$$Lx'''+My'''+Nz'''=K,$$

aus welchen Gleichungen entspringt:

$$L=z'(y'''-y'')+z''(y'-z''')+z'''(y''-y'),$$
$$M=x'(z'''-z'')+x''(z'-z''')+x'''(z''-z'),$$
$$N=y'(x'''-x'')+y''(x'-x''')+y'''(x''-x'),$$
$$K=x'(y''z'''-y'''z'')+x''(y'''z'-y'z''')+x'''(y'z''-y''z').$$

2. Wir wollen jetzt die geometrische Bedeutung der Größen L, M, N suchen. Wir bezeichnen deshalb durch T die Fläche des geradlinigen Dreiecks, welches zwischen den drei gegebenen Punkten enthalten ist; ferner durch t, t', t'' die Projectionen von T auf den Coordinatenebenen xz, yx und xy. Es seien OX, OY, OZ (Fig. 29) die drei rechtwinkligen Achsen, auf welche das Dreieck T bezogen wird, so daß seine Projectionen auf den Ebenen xz, yz und xy die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ und $\alpha''\beta''\gamma''$ sind, deren Flächeninhalte beziehungsweise durch t, t', t'' dargestellt worden.

Die Coordinaten der Scheitelpunkte des Dreiecks t'' sind hiernach x', y' für den ersten, x'', y'' für den zweiten, und x''', y''' für den dritten.

Nun ist aber offenbar

Dreieck $\alpha''\beta''\gamma''=t''=$ Trapez $nm\beta''\alpha''$ — Tr. $mp\gamma''\alpha''$ — Tr. $np\gamma''\beta''$;

woraus, wenn man in den zweiten Theil die Coordinatenwerthe einführt und entwickelt, sich sofort ergibt: $t''=\frac{N}{2}$. Auf ähnliche Weise entspringt: $\frac{M}{2}=t'$, und $\frac{L}{2}=t$.

3. Wir schreiten jetzt zur Auffsuchung der geometrischen Bedeutung von K. Nach §. 41 haben wir $T^2=t^2+t'^2+t''^2$ oder, wenn die eben gefundenen Werthe substituirt werden, $4T^2=M^2+N^2+L^2$.

Heißt aber δ der Abstand des Ursprungs von der Ebene T, so ist

$$\delta=\frac{K}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}} \text{ nach §. 37; mithin } K=2T\delta.$$

Nun ist aber das Volumen V der Pyramide, die das Dreieck T zur Basis und den Ursprung zum Scheitel hat, gleich dem Produkte des dritten Theils der Basis in die Höhe des Scheitels über der Basis, oder $V=\frac{1}{3}\delta T$; d. h. $K=6V$. Unsere Größe ist daher gleich der sechsfachen Pyramide V, welche zwischen den drei Scheiteln des Dreiecks und dem Ursprung enthalten ist, oder auch gleich dem Parallelepiped P, dessen drei Kanten durch jene vier Punkte bestimmt sind.

4. Substituiren wir die gefundenen Werthe von L, M, N und K in die Gleichung $Lx+My+Nz=K$; so haben wir:

$$\frac{x}{3}\cdot t+\frac{y}{3}\cdot t'+\frac{z}{3}t''=\frac{1}{6}K;$$

woraus folgender Lehrsatz entspringt:

Wenn man die Fläche eines Dreiecks auf die drei Coordinatenebenen projicirt, so ist die Summe der drei Pyramiden, deren Scheitel ein willkürlicher Punkt der Dreiecksebene und deren Basis die drei Projectionsdreiecke sind, gleich dem Volumen der Pyramide, deren Scheitel im Ursprung liegt und deren Basis das Dreieck T ist.

Note VI zu §. 39.

Den Winkel zweier Geraden zu finden, im Fall daß das Achsensystem ein schiefwinkliges ist.

Die Gleichungen der beiden Geraden seien:

$$\left.\begin{array}{l} x=az+\alpha \\ y=bz+\beta \end{array}\right\} \text{ und } \left.\begin{array}{l} x=a'z+\alpha' \\ y=b'z+\beta' \end{array}\right\}.$$

Man denke sich durch den Ursprung A der Coordinaten zwei zu den gegebenen respektiv parallele Geraden gezogen; die Gleichungen der letztern werden sein:

$$\left.\begin{array}{l} x=az \\ y=bz \end{array}\right\} \text{ und } \left.\begin{array}{l} x=a'z \\ y=b'z \end{array}\right\}.$$

Hierauf trage man auf jede dieser Linien von A aus ein Stück gleich der Längeneinheit, bezeichne dann die schiefwinklige Coordinaten der so erhaltenen Endpunkte P′ und P″, bezüglich mit x', y', z' und x'', y'', z'', und ziehe endlich die Gerade P′P″. Das Dreieck P′AP″ gibt, wenn wir den gesuchten Winkel mit A bezeichnen,

$$\cos A=\frac{2-\overline{P'P''}^2}{2}.$$

Nun ist $\overline{P'P''}^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2+2(x'-x'')$
$(y'-y'')\cos(xy)+2(x'-x'')(z'-z'')\cos(xz)$
$+2(y'-y'')(z'-z'')\cos(yz)$.

Mittelst dieses Werthes reducirt sich der Ausdruck von cos A, wenn man erwägt, daß

$x'^2+y'^2+z'^2+2x'y'\cos(xy)+2x'z'\cos(xz)+2y'z'\cos(yz)=1$, und
$x''^2+y''^2+z''^2+2x''y''\cos(xy)+2x''z''\cos(xz)+2y''z''\cos(yz)=1$, auf:

$$\cos A = x'x'' + y'y'' + z'z'' + (x'y'' + x''y')\cos(xy)$$
$$+ (x'z''+x''z')\cos(xz) + (y'z''+y''z')\cos(yz);$$

oder wegen der Gleichungen

$x'=az'$, $y'=bz'$, und $x''=a'z''$, $y''=b'z''$ auf:

$$\cos A = z'z'' \times$$
$$[1+aa'+bb'+(ab'+a'b)\cos(xy)+(a+a')\cos(xz)+(b+b')\cos(yz)].$$

Substituiren wir endlich hierin statt z' und z'' ihre Werthe aus

$1=z'^2(1+a^2+b^2+2ab\cos(xy)+2a\cos(xz)+2b\cos(yz)]$, und
$1=z''^2[1+a'^2+b'^2+2a'b'\cos(xy)+2a'\cos(xz)+2b'\cos(yz)]$; so kommt:

$$\cos A = \frac{1+aa'+bb'+(ab'+a'b)\cos(xy)+(a+a')\cos(xz)+(b+b')\cos(yz)}{\sqrt{[1+a^2+b^2+2ab\cos(xy)+2a\cos(xz)+2b\cos(yz)]} \times \sqrt{[1+a'^2+b'^2+2a'b'\cos(xy)+2a'\cos(xz)+2b'\cos(yz)]}}.$$

Sollen die Geraden auf einander senkrecht sein, so ist $\cos A=0$; mithin besteht in diesem Falle zwischen den Coefficienten a, a′, b, b′ für schiefwinklige Coordinaten die Relation:

$$1+aa'+bb'+(ab'+a'b)\cos(xy)+(a+a')\cos(xz)+(b+b')\cos(yz)=0.$$

Note VII zu §. 42.

Die Bedingungsgleichungen für schiefwinklige Coordinaten zu finden, wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht.

Es seien $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ die Gleichungen der Geraden und $z=Ax+By+C$ die der Ebene. Bezeichnen x', y', z' die Coordinaten eines willkürlichen Punktes derselben, so hat man:

$$z-z'=A(x-x')+B(y-y').$$

Die Gleichungen einer beliebigen durch den Punkt (x', y', z') in der gegebenen Ebene liegenden Gerade sind:

$$x-x'=a'(z-z'),\quad y=b'(z-z'),$$

durch deren Verbindung mit der vorhergehenden die Bedingungsgleichung

$$1=Aa'+Bb' \quad \ldots \quad (1) \text{ entspringt.}$$

Soll nun die Gerade $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ auf der gegebenen Ebene senkrecht sein, so muß erstere auf allen in der letztern gezogenen Geraden senkrecht sein. Dies gibt uns nach der vorhergehenden Note die Relation:

$$1+aa'+bb'+(ab'+a'b)\cos(xy)+(a+a')\cos(xz)+(b+b')\cos(yz)=0 \ldots (2)$$

Indem wir b′ aus den Gleichungen (1) und (2) eliminiren, bekommen wir:

$$B[1+a\cos(xz)+b\cos(yz)]+b+a\cos(xy)+\cos(yz)$$
$$-a'[A[b+a\cos(xy)+\cos(yz)]-B[a+b\cos(xy)+\cos(yz)]]=0.$$

Dieser Gleichung muß aber, wenn die Gerade auf der Ebene senkrecht stehen soll, Genüge geschehen, welchen Werth auch a' haben mag; woraus sich sofort die gesuchten Bedingungsgleichungen ergeben, nämlich:

$$B[1+a\cos(xz)+b\cos(yz)]+b+a\cos(xy)+\cos(yz)=0,$$
$$A[b+a\cos(xy)+\cos(yz)]-B[a+b\cos(xy)+\cos(xz)]=0.$$

Für rechtwinklige Coordinaten verwandeln sich diese Relationen wieder in:

$$B+b=a,\quad A+a=0.$$

Note VIII zu §. 44.

Herleitung verschiedener Gleichheitsgruppen, die eine unmittelbare Folge der Systeme (A), (B) und (D) sind.

1. Bezeichnen wir nämlich die Cosinus der Winkel, welche die alten Achsen x, y, z eines rechtwinkligen Coordinatensystems beziehungsweise mit den neuen Achsen der x', y', z' eines ebenfalls rechtwinkligen Coordinatensystems bilden, durch X, Y, Z, u. X', Y', Z', u. X'', Y'', Z''; so sind die Transformationsformeln und die dazugehörigen Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x&=Xx'+X'y'+X''z',\\ y&=Yx'+Y'y'+Y''z',\\ z&=Zx'+Z'y'+Z''z'; \end{aligned}\right\}(A)\quad \left.\begin{aligned} X^2+Y^2+Z^2&=1,\\ X'^2+Y'^2+Z'^2&=1,\\ X''^2+Y''^2+Z''^2&=1; \end{aligned}\right\}(B)$$

$$\left.\begin{aligned} XX'+YY'+ZZ'&=0,\\ XX''+YY''+ZZ''&=0,\\ X'X''+Y'Y''+Z'Z''&=0. \end{aligned}\right\}(D)$$

Die daraus resultirenden Gleichheitsgruppen sind:

$$\left.\begin{aligned} x'&=Xx+Yy+Zz,\\ y'&=X'x+Y'y+Z'z,\\ z'&=X''x+Y''y+Z''z; \end{aligned}\right\}(A')\quad \left.\begin{aligned} X^2+X'^2+X''^2&=1,\\ Y^2+Y'^2+Y''^2&=1,\\ Z^2+Z'^2+Z''^2&=1; \end{aligned}\right\}(B')$$

$$\left.\begin{aligned} XY+X'Y'+X''Y''&=0,\\ XZ+X'Z'+X''Z''&=0,\\ YZ+Y'Z'+Y''Z''&=0; \end{aligned}\right\}(D')$$

$$X(Y'Z''-Z'Y'')+Y(Z'X''-X'Z'')+Z(X'Y''-Y'X'')=1;\quad (E')$$

$$\left.\begin{aligned} (YZ'-ZY')^2+(Y'Z''-Z'Y'')^2+(Y''Z-Z''Y)^2&=1,\\ (ZX'-XZ')^2+(Z'X''-X'Z'')^2+(Z''X-X''Z)^2&=1,\\ (XY'-YX')^2+(Y'X''-X'Y'')^2+(X''Y-Y''X)^2&=1. \end{aligned}\right\}(F')$$

2. Es handelt sich jetzt darum, die Richtigkeit der vorstehenden Gleichheitsgruppen direct nachzuweisen. Wir multipliciren deshalb die Gleichungen (A) der Reihe nach durch X, Y, Z und addiren hierauf die drei Producte. Alsdann ist in der Summe der Coefficient von x', wenn die erste Gleichung (B) in Betracht gezogen wird, gleich 1; dagegen verschwinden die Coefficienten von y' und z', infolge der beiden ersten Gleichungen (D).

Hiernach wäre die erste der Gleichungen (A′) gefunden. Auf ähnliche Weise ergeben sich durch Multiplikation der Gleichungen (A) mit X', Y', Z' und dann mit X'', Y'', Z'' die beiden andern Gleichungen (A′).

3. Wir sehen in den Ausdrücken (A) die Größen x', y', z' als unbekannt an und suchen daraus nach der gewöhnlichen Methode ihre Werthe, wobei die in §. 20 der niedern Algebra aufgeführten Formeln in Anwendung kommen können. Auf diese Art erhalten wir, wenn der Kürze halber,

$X(Y'Z''-Y''Z')+Y(X''Z'-X'Z'')+Z(X'Y''-X''Y')=K$ gesetzt wird:

$$x'=x\times\frac{(Y'Z''-Y''Z')+y(X''Z'-X'Z'')+z(X'Y''-X''Y')}{K},$$

$$y'=x\times\frac{(Y''Z-YZ'')+y(XZ''-ZX'')+z(X''Y-Y''X)}{K},$$

$$z'=x\times\frac{(YZ'-ZY')+y(X'Z-Z'X)+z(XY'-YX')}{K},$$

Die Zusammenstellung der Coefficienten von x, y, z in diesen letztern Ausdrücken und in den Formeln (A′) liefert uns folgende neun Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll} KX=Y'Z''-Y''Z', & KY=X''Z'-X'Z'', & KZ=X'Y''-X''Y'; \\ KX'=Y''Z-YZ'', & KY'=XZ''-ZX'', & KZ'=X''Y-Y''X; \\ KX''=YZ'-ZY', & KY''=X'Z-Z'X, & KZ''=XY'-YX'. \end{array}\right\} (G')$$

Addiren wir die Quadrate der drei in der ersten Linie stehenden Gleichungen, so bekommen wir:

$$K^2(X^2+Y^2+Z^2)=(Y'Z''-Y''Z')^2+(X''Z'-X'Z'')^2+(X'Y''-X''Y')^2.$$

Da das zweite Glied sich auf die Form:

$$(X'^2+Y'^2+Z'^2)(X''^2+Y''^2+Z''^2)-(X'X''+Y'Y''+Z'Z'')^2$$

bringen läßt, so reducirt sich unser letzter Ausdruck, wegen der Gleichungen (B) und der dritten Gleichung (D) auf $K^2=1$. Die Größe K muß positiv sein; denn machen wir $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$; so wird $X=Y'=Z''=1$, während die übrigen Coefficienten verschwinden, und die Größe K reducirt

sich sofort auf die positive Einheit, wodurch die Aussage der Gleichung (E′) ihre Bestätigung erhalten hätte.

4. Die erste und zweite Gleichung (B) geben:

$$(Y^2+Z^2)(Y'^2+Z'^2)=(1-X^2)(1-X'^2)\text{, oder}$$
$$Y^2Y'^2+Z^2Y'^2+Z'^2Y^2+Z^2Z'^2-X^2X'^2+X^2+X'^2=1.$$

Die erste Gleichung (D) gibt aber

$$X^2X'^2=Y^2Y'^2+Z^2Z'^2+2ZZ'YY'.$$

Hiernach geht die vorhergehende Gleichung in

$$X^2+X'^2+(Z'Y-Y'Z)^2=1\text{, oder in } X^2+X'^2+X''^2=1 \text{ über,}$$

weil nach der ersten Formel (G′) in der dritten Reihe $YZ'-Y'Z=X''$ ist. Die erste Gleichung B′ wäre demnach gefunden. Auf ähnliche Weise werden die beiden andern Gleichungen (B′) aus den Gleichungen (A) und (D) hergeleitet.

5. Ziehen wir ferner das Quadrat einer der drei Gleichungen (D′) von dem Product der zwei entsprechenden Gleichungen des Systems (B′) ab, so entspringt das System (F′) daraus. Auf diese Art gibt die dritte Gleichung (D′) quadrirt und von dem Product der beiden letzten Gleichungen (B′) abgezogen, folgende Gleichung:

$$(Y^2+Y'^2+Y''^2)(Z^2+Z'^2+Z''^2)-(YZ+Y'Z'+Y''Z'')^2=1.$$

Die Multiplication und Quadraterhebung ausgeführt, erhält man nach geschehener Reduction die erste Gleichung des Systems (F′). Die beiden andern werden auf analoge Weise hergeleitet.

Hat man daher allgemein zwischen den Größen:

$$X, Y, Z, X', Y', Z', X'', Y'', Z''$$

die Systeme (B) und (D), so hat man auch die Systeme:

(B′), (D′), (F′), (E′) und (G′).

Note IX zu §. 68.

Ueber die Aehnlichkeit der Curven und Flächen.

1. Das in der 17ten Note der analytischen Geometrie der Ebene über die Aehnlichkeit der Curve Gesagte können wir mit Leroi allgemeiner und bestimmter folgendermaßen zusammenfassen: Zwei Curven irgend eines Grades, welche in der nämlichen oder in parallelen Ebenen liegen, sind ähnlich und ähnlichliegend, wenn man, nachdem in der ersten von einem willkürlich angenommenen Punkte O verschiedene Leitstrahlen OM, ON . : . (Fig 24) gezogen worden, in der zweiten einen Punkt O′ in der Art angeben kann, daß die von ihm aus parallel zu den vorigen

und nach derselben Seite hin geführten Leitstrahlen O'M', O'N' . . . mit diesem ein constantes Verhältniß n haben, d. h. wenn

$$\frac{O'M'}{OM}=\frac{O'N'}{ON}\ldots=n.$$

Man kann die zwei Punkte O und O' Mittelpunkte der Aehnlichkeit nennen. Sind zwei solcher Punkte O und O' vorhanden, so wird es sich leicht nachweisen lassen, daß deren noch unendlich viele existiren. Denn wählt man nach Belieben den Punkt I, zieht dann zu OI parallel die Linie O'I', auf welche man ein solches Stück trägt, daß $\frac{O'I'}{OI}=n$; so folgt aus der Betrachtung ähnlicher Dreiecke, daß die Leitstrahlen IM und I'M', IN und I'N' . . . respectiv parallel sind und das Verhältniß n zu einander haben, d. h. die Punkte I und I' sind entsprechende Mittelpunkte der Aehnlichkeit.

Es seien jetzt:

$$f(x,y)=0,\ (1)\quad f'(x',y')=0\ \ldots\ (2)$$

die Gleichungen zweier auf einerlei Achse OX und OY bezogenen, ähnlicher und ähnlich liegender Curven. Wählt man nun den Ursprung der Coordinaten O zum Mittelpunkt der Aehnlichkeit in der ersten Curve, so existirt in der zweiten ein demselben entsprechender Mittelpunkt O', dessen Coordinaten α, β sein mögen. Die Aehnlichkeit der Dreiecke POM, P'O'M' gibt nun:

$$\frac{x'-\alpha}{x}=n,\quad \frac{y'-\beta}{y}=n\ \ldots\ (3),$$

wo n eine noch unbekannte, aber constante Größe ist; d. h. die Coordinaten der beiden ähnlichen Curven (1) und (2) stehen in der in (3) ausgesprochenen Relation zu einander. Substituiren wir daher in (1) statt x und y die aus (3) entnommenen Werthe, so muß das Resultat

$$f\left(\frac{x'-\alpha}{n},\ \frac{y'-\beta}{n}\right)=0\ldots(4)$$

mit (2) identisch werden, weil beide Gleichungen der nämlichen zweiten, auf einerlei Achsen bezogenen Curve angehören. In jedem einzelnen Falle muß man daher die Gleichungen (2) und (4) gegen einander halten, und dann sehen, ob sich den daraus resultirenden Bedingungen durch reelle Werthe der Constanten α, β und n genügen läßt.

2. Es seien die zwei Curven zweiter Ordnung:

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0,$$
$$a'y'^2+b'x'y'+c'x'^2+d'y'+e'x'+f'=0.$$

Die Substitution von $x = \frac{x' - \alpha}{n}$ und $y = \frac{y' - \beta}{n}$ in die erste Gleichung gibt:

$$ay'^2 + bx'y' + cx'^2 + y'(dn - 2a\beta - b\alpha) + x'(en - 2c\alpha - b\beta)$$
$$+ a\beta^2 + c\alpha^2 + b\alpha\beta - nd\beta - ne\alpha + fn^2 = 0$$

Die Identität dieser Gleichung mit der zweiten gegebenen erfordert die Bedingungen:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'};$$
$$\frac{a}{a'} = \frac{dn - 2a\beta - b\alpha}{d'}, \quad \frac{a}{a'} = \frac{en - 2c\alpha - b\beta}{e'}$$
$$\frac{a}{a'} = \frac{a\beta^2 + c\alpha^2 + b\alpha\beta - nd\beta - ne\alpha + fn^2}{f'}.$$

Die beiden ersten Gleichungen sind die zwei hier erforderlichen Aehnlichkeitsbedingungen; die drei übrigen dienen zur Berechnung von α, β und n, d. h. zur Bestimmung des Mittelpunktes und des Verhältnisses der Aehnlichkeit.

Aus den zwei Relationen $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ folgt, daß zwei Curven zweiten Grades ähnlich und ähnlichliegend sind, wenn die Coefficienten der drei Glieder vom zweiten Grade in beiden Gleichungen beziehungsweise proportional zu einander sind.

3. Zwei Flächen einer beliebigen Ordnung sind ähnlich und ähnlich liegend, wenn, nachdem in der ersten von einem willkürlichen Punkte aus verschiedene Leitstrahlen gezogen worden, in der zweiten Fläche ebenfalls ein solcher Punkt existirt, daß alle von ihm aus mit den vorigen parallel und nach derselben Seite hin geführten Leitstrahlen mit diesen ein constantes Verhältniß n haben.

Es seien $f(x, y, z) = 0$ und $f'(x', y', z') = 0$ die Gleichungen zweier, auf dieselben Achsen bezogenen, ähnlicher und ähnlich liegender Flächen. Nimmt man den Ursprung zu dem Mittelpunkt der Aehnlichkeit der ersten Fläche, und sind, α, β, γ die Coordinaten des entsprechenden Mittelpunktes in der zweiten Fläche; so hat man die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{x' - \alpha}{x} = n, \quad \frac{y' - \beta}{y} = n, \quad \frac{z' - \gamma}{z} = n.$$

Sucht man aus ihnen die Werthe von x, y, z, um sie in $f(x, y, z) = 0$ zu substituiren; so wird das dadurch gewonnene Resultat mit $f'(x' y' z') = 0$ identisch sein, weil beide Gleichungen die zweite auf einerlei Achse bezogene Fläche repräsentiren.

4. Es seien jetzt:

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+byz+b'xz+b''xy+cx+c'y+c''z+d=0,$$
$$Ax'^2+A'y'^2+A''z'^2+By'z'+B'x'z'+B''x'y'+Cx'+C'y'+C''z'+D=0.$$

die Gleichungen zweier Flächen zweiten Grades.

Indem man für x, y, z ihre Werthe aus

$$\frac{x'-\alpha}{x}=n,\quad \frac{y'-\beta}{y}=n,\quad \frac{z'-\gamma}{z}=n$$

in die erste substituirt, erhält man neun Bedingungsgleichungen, von denen die fünf ersten, nämlich:

$$\frac{a}{A}=\frac{a'}{A'}=\frac{a''}{A''}=\frac{b}{B}=\frac{b'}{B'}=\frac{b''}{B''}$$

die eigentlichen Bedingungen der Aehnlichkeit sind; die vier andern dienen zur Bestimmung der Unbekannten α, β, γ und n.

Note X zu §. 71.

Die geraden Erzeugungslinien des einfächerigen Hyperboloids.

1. Wenn eine Gerade fortwährend auf drei festen geraden Linien hingleitet, von denen irgend zwei nicht in einerlei Ebene liegen; so ist die hierdurch erzeugte Fläche ein Hyperboloid mit einem Mantel. Um die Richtigkeit dieses Satzes nachzuweisen, denken wir uns mit Binet durch jede der drei festen geraden Linien zwei den beiden andern Geraden respectiv parallele Ebenen gelegt. Diese sechs Ebenen begrenzen nun ein Parallelepiped, in dessen Mittelpunkt O wir den Ursprung der Coordinaten versetzen, wobei wir die Achsen OX, OY, OZ bezüglich parallel zu den drei festen Geraden annehmen. Für die letztern erhalten wir alsdann offenbar nachstehende Gleichungssysteme, wenn 2a, 2b, 2c die Längen dreier zusammenstoßender Kanten unsers Parallelepipeds sind:

$$\left.\begin{matrix} z=-c \\ y=+b \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} z=+c \\ x=-a \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} x=+a \\ y=-b \end{matrix}\right\}.$$

Damit nun die bewegliche Gerade, deren Gleichungen

$$x=\alpha z+\gamma,\quad y=\beta z+\delta \quad (1)$$

sind, eine jede der drei gegebenen schneide, müssen folgende Bedingungsgleichungen bestehen:

$$(b+\delta)\alpha+(a-\gamma)\beta=0,\quad a+\alpha c+\gamma=0,\quad b+\beta c-\delta=0.$$

Von den vier Constanten α, β, γ, δ bleibt daher eine, z. B. α, willkührlich: legt man mithin diesem letztern verschiedene Werthe bei und berechnet alsdann vermittelst der drei vorhergehenden Gleichungen die entsprechenden Werthe von β, γ, δ, um solche in (1) einzuführen, so

wird man dadurch die Gleichungen für ebensoviele besondere Lagen der Erzeugungslinie erhalten. Eliminirt man daher zwischen den eben erwähnten drei Gleichungen und den zwei der beweglichen Geraden angehörigen die vier Größen α, β, γ, δ, so wird das daraus gewonnene Resultat, nämlich:

$$ayz + bxz + cxy + abc = 0 \quad (2)$$

allen Lagen der Erzeugungslinie zukommen, oder was dasselbe ist, die Gleichung der erzeugten Fläche sein. Sie läßt einen Mittelpunkt zu, welcher der Ursprung der Coordinaten ist, da die Summe der Exponenten in jedem Gliede gerade ist. Unter der ersten Klasse der Flächen des zweiten Grades läßt sich aber nach §. 94 nur auf dem Hyperboloid mit einem Mantel eine Gerade ihrer unbegränzten Länge nach anlegen; die Gleichung (2) repräsentirt daher ein solches Hyperboloid.

2. Hätte man zu Leitlinien der beweglichen Geraden die drei Geraden gewählt, deren Gleichungssysteme

$$\left.\begin{matrix} z = +c \\ y = -b \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} z = -c \\ x = +a \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x = -a \\ y = +b \end{matrix}\right\} \text{ sind,}$$

und welche ebenfalls Kanten unsers Parallelepipeds bilden; so würde man dasselbe Hyperboloid gefunden haben.

Hieraus folgt, daß das nämliche einfächerige Hyperboloid auf zweierlei Art durch eine Gerade erzeugt werden kann.

Note XI zu §. 72.

Die geraden Erzeugungslinien des hyperbolischen Paraboloids.

1. Wenn eine Gerade über zwei feste, nicht in einer Ebene liegende gerade Linien hingleitet, und dabei fortwährend einer gegebenen Ebene parallel bleibt; so ist die dadurch erzeugte Fläche ein hyperbolisches Paraboloid. Man nehme die gegebene Ebene zur Coordinatenebene xz, und wähle die Achse der x so, daß sie durch die beiden Punkte geht, in denen jene Ebene von den festen Geraden getroffen wird, setze den Ursprung O der Coordinaten in die Mitte der Entfernung gedachter Punkte; durch denselben ziehe man dann zwei Geraden l und l′ den zwei gegebenen parallel und nehme die durch sie gelegte Ebene zur Coordinatenebene yz, deren Durchschnitt mit der gegebenen Ebene die Achse der z ist; in der Ebene yz ziehe man ferner beliebig eine Parallele zur Achse der z, dieselbe wird die Geraden l und l′ in zwei Punkten p und p′ schneiden; man halbire endlich pp′ in m und lasse die Verbindungslinie Om als Achse der y gelten.

Die Gleichungen der beiden festen Geraden in Bezug auf dieses Coordinatensystem sind folglich:

$$\left.\begin{array}{l} x=b, \\ y=az, \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=-b \\ y=-az \end{array}\right\};$$

während die Erzeugungslinie durch $y=\gamma$, $x=\alpha z+\beta$ ausgedrückt wird.

Damit sie jeder der Leitlinien begegne, müssen die Bedingungsgleichungen: $\beta=0$, $ba=\alpha\gamma$ statt finden. Eliminiren wir nun α, β, γ aus den vier letzten Gleichungen, so kommt $xy=baz$ als Gleichung der gesuchten Fläche, welche keinen Mittelpunkt zuläßt, mithin einem der beiden Paraboloide angehört, und zwar dem hyperbolischen, weil für $z=\gamma$ eine Hyperbel entsteht, welche nur im letztgenannten Paraboloid vorkommen kann.

2. Nähme man die beiden Geraden, deren Gleichungen in Bezug auf das gewählte Coordinatensystem

$$\left.\begin{array}{l} y=b \\ x=az \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} y=-b \\ x=-az \end{array}\right\} \text{ sind,}$$

als die zu schneidenden festen Linien, ferner die Coordinatenebene yz als diejenige Ebene an, welcher die Erzeugungslinie beständig parallel sein soll, deren Gleichungen mithin $x=\gamma$, $y=\alpha z+\beta$ wären; so würde man dasselbe hyperbolische Paraboloid wie oben erhalten haben. Hieraus folgt, daß das hyperbolische Paraboloid auf zweierlei Art durch eine Gerade erzeugt werden kann.

Note XII zu §. 93.

Die Fläche, welche durch die Bewegung des Durchschnittspunktes von drei unter einander senkrechten Ebenen entsteht, deren jede ein gegebenes Ellipsoid in einem Punkte berührt, ist eine mit dem Ellipsoid concentrische Kugel. Poisson hat diesen von Monge zuerst aufgestellten Satz folgendermaßen bewiesen.

1. Es sei $$Ax^2+By^2+Cz^2=1$$

die Gleichung des Ellipsoids, mithin

$$\sqrt{\frac{1}{A}}, \sqrt{\frac{1}{B}}, \sqrt{\frac{1}{C}}$$

die Halbachsen desselben. Sind x', y', z', x'', y'', z'', und x''', y''', z''',

beziehungsweise die Coordinaten der Berührungspunkte des Ellipsoids mit jenen Ebenen; so haben wir:

$$\left.\begin{array}{r} Ax'^2+By'^2+Cz'^2=1 \\ Ax''^2+By''^2+Cz''^2=1 \\ Ax'''^2+By'''^2+Cz'''^2=1 \end{array}\right\} (1).$$

Die Gleichungen der drei Berührungsebenen sind ferner:

$$\left.\begin{array}{r} Ax'x+By'y+Cz'z=1 \\ Ax''x+By''y+Cz''z=1 \\ Ax'''x+By'''y+Cz'''z=1 \end{array}\right\} (2).$$

Das Senkrechtsein dieser Ebenen zu einander gibt:

$$\left.\begin{array}{r} A^2x'x''+B^2y'y''+C^2z'z''=0 \\ A^2x'x'''+B^2y'y'''+C^2z'z'''=0 \\ A^2x''x'''+B^2y''y'''+C^2z''z'''=0 \end{array}\right\} (3).$$

Setzen wir der Kürze halber

$$Ax'=a,\ Ax''=a',\ Ax'''=a'';$$
$$By'=b,\ By''=b',\ By'''=b'';$$
$$Cz'=c,\ Cz''=c',\ Cz'''=c'';$$

so verwandeln sich die Gleichungen (1) und (3) in:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\frac{c^2}{C}=1 \\ \frac{a'^2}{A}+\frac{b'^2}{B}+\frac{c'^2}{C}=1 \\ \frac{a''^2}{A}+\frac{b''^2}{B}+\frac{c''^2}{C}=1 \end{array}\right\} (4);$$

$$\left.\begin{array}{r} aa'+bb'+cc'=0 \\ aa''+bb''+cc''=0 \\ a'a''+b'b''+c'c''=0 \end{array}\right\} (5).$$

2. Setzen wir ferner:

$$\left.\begin{array}{r} a^2+b^2+c^2=R^2 \\ a'^2+b'^2+c'^2=R'^2 \\ a''^2+b''^2+c''^2=R''^2 \end{array}\right\} 6);$$

so ergeben sich aus (5) und (6) sofort folgende zwei Systeme:

$$\left.\begin{aligned}\frac{ab}{R^2}+\frac{a'b'}{R'^2}+\frac{a''b''}{R''^2}=0\\ \frac{ac}{R^2}+\frac{a'c'}{R'^2}+\frac{a''c''}{R''^2}=0\\ \frac{bc}{R^2}+\frac{b'c'}{R'^2}+\frac{b''c''}{R''^2}=0\end{aligned}\right\}(7);$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{a^2}{R^2}+\frac{a'^2}{R'^2}+\frac{a''^2}{R''^2}=1\\ \frac{b^2}{R^2}+\frac{b'^2}{R'^2}+\frac{b''^2}{R''^2}=1\\ \frac{c^2}{R^2}+\frac{c'^2}{R'^2}+\frac{c''^2}{R''^2}=1\end{aligned}\right\}(8).$$

Denn nehmen wir die drei unbestimmten Größen u, u', u'' dergestalt, daß

$$au+a'u'+a''u''=p,$$
$$bu+b'u'+b''u''=q,$$
$$cu+c'u'+c''u''=r$$

ist; so haben wir, wenn wir diese drei Gleichungen quadriren und hierauf addiren:

$$R^2u^2+R'^2u'^2+R''^2u''^2=p^2+q^2+r^2 \quad (1).$$

Indem wir aber von diesen drei Gleichungen die erste mit a, die zweite mit b, die dritte mit c multipliciren, finden wir die Summe dieser Producte, wenn wir die Gleichungssysteme (5) und (6) zu Hülfe nehmen:

$$R^2u=pa+qb+rc.$$

Verfahren wir analog indem wir einmal mit a', b' und c' dann mit a'', b'', und c'' multipliciren, so erhalten wir:

$$R'^2u'=pa'+qb'+rc'$$
$$R''^2u''=pa''+qb''+rc''.$$

Werden ferner aus diesen letzten Gleichungen die Werthe von u, u', u'', gesucht, um sie in (1) zu substituiren, so kommt:

$$p^2\left(\frac{a^2}{R^2}+\frac{a'^2}{R'^2}+\frac{a''^2}{R''^2}\right)+q^2\left(\frac{b^2}{R^2}+\frac{b'^2}{R'^2}+\frac{b''^2}{R''^2}\right)$$
$$+r^2\left(\frac{c^2}{R^2}+\frac{c'^2}{R'^2}+\frac{c''^2}{R''^2}\right)$$

$$+2pq\left(\frac{ab}{R^2}+\frac{a'b'}{R'^2}+\frac{a''b''}{R''^2}\right)+2pr\left(\frac{ac}{R^2}+\frac{a'c'}{R'^2}+\frac{a''c''}{R''^2}\right)$$
$$+2qr\left(\frac{bc}{R^2}+\frac{b'c'}{R'^2}+\frac{b''c''}{R''^2}\right)=p^2+q^2+r^2.$$

Aus dieser Gleichung entspringen sofort, wegen der Identität in Bezug auf p, q, r, die Gleichungssysteme (7) und (8).

3. Quadriren wir jetzt die Gleichungen (2), nachdem die erste durch R, die zweite durch R', und die dritte durch R'' dividirt worden; so gibt die Summe dieser Quadrate, wenn auf die Gleichungssysteme (7) und (8) Rücksicht genommen wird:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2}.$$

Addiren wir ebenso die Gleichungen (4), nachdem die erste durch R^2, die zweite durch R'^2, und die dritte durch R''^2 dividirt worden; so finden wir mit Berücksichtigung der Gleichungen (8):

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2};\text{ also}$$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}:$$

d. h. der veränderliche Durchschnittspunkt der drei unter einander senkrechten Ebenen, deren jede das Ellipsoid berührt, beschreibt eine mit dem Ellipsoid concentrische Kugel, deren Halbmesser gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der drei Halbachsen des Ellipsoids ist.

4. Geht das Ellipsoid in eine Kugel über, deren Halbmesser r ist; so findet man $x^2+y^2+z^2=3r^2$: d. h. eine mit der gegebenen concentrische Kugel, deren Halbmesser $=r\sqrt{3}$ ist.

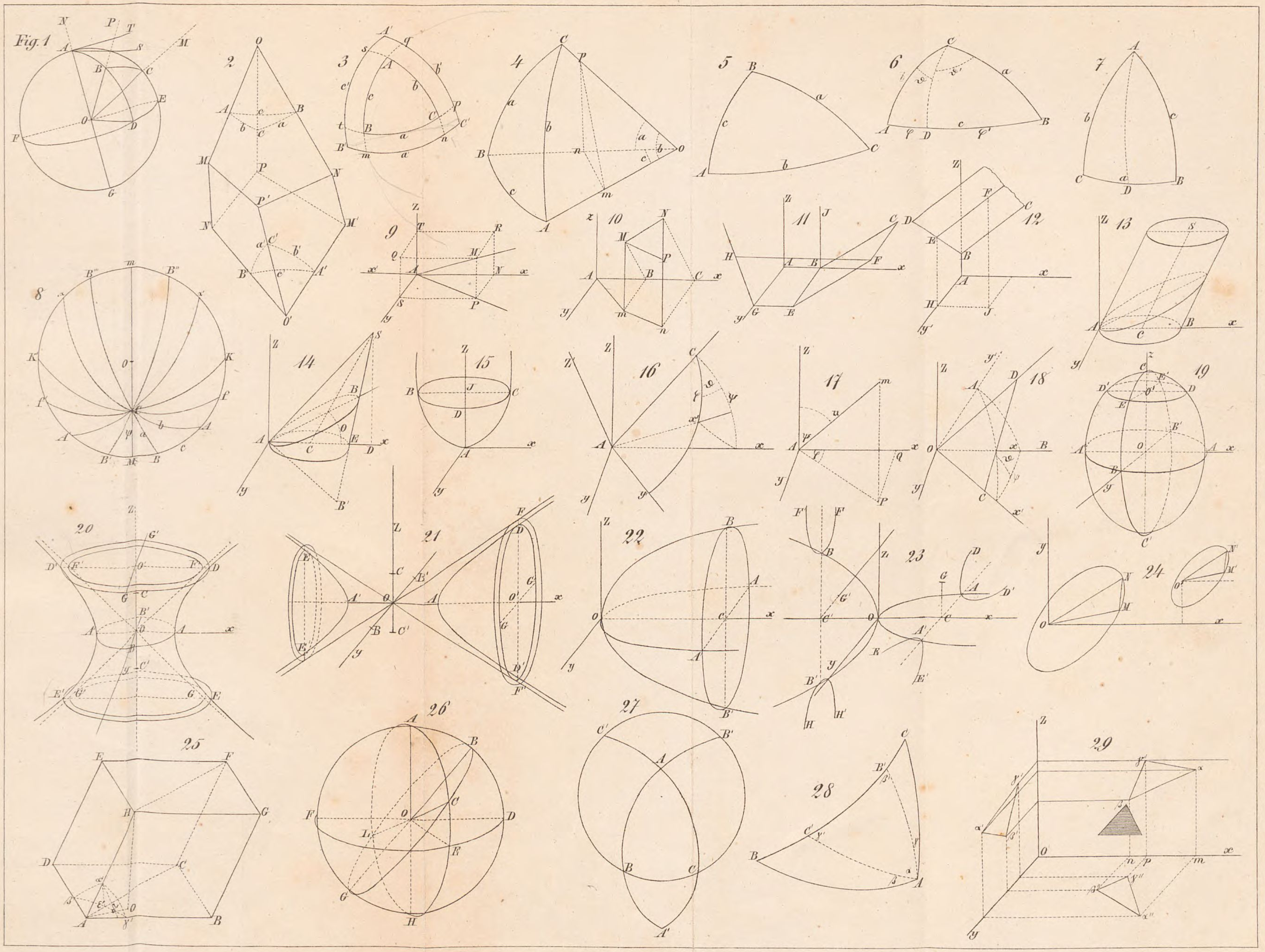
Fig. 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Francoeur, Louis Benjamin,

Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik

Bd.: 2,2

Bern [u.a.] 1842

Math.u. 62 mb-2,2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593814-9